Prefazione

La possibilità di controllare il comportamento di un fascio di luce utilizzando altra luce è una delle caratteristiche più interessanti dell'ottica non lineare. La circostanza, infatti, in cui l'indice di rifrazione del mezzo viene a dipendere dall'ampiezza del campo elettrico della radiazione, è sorgente di una varietà di fenomeni estranei, ovviamente, all'ottica lineare, che risultano molto interessanti sia dal punto di vista teorico che da quello sperimentale-applicativo. Emblematico è l'esempio dei solitoni spaziali (Kerr o fotorifrattivi) nei quali la non linearità compensa la proprietà generale dei fasci a diffrangere, dando luogo a fasci autoconfinantisi. La proprietà dell'indice di rifrazione di dipendere, in generale, dall'intensità della radiazione, può però essere utilizzata in situazioni più complicate (con più di un fascio), per realizzare una reciproca interazione tra i fasci stessi. In generale il problema dello studio dell'interazione di fasci luminosi, dovuta alla non linearità, è dal punto di vista teorico estremamente complicato, essendo le equazioni coinvolte, alle derivate parziali, non lineari e accoppiate. Applicativamente però, la situazione è molto interessante, perché esiste la possibilità pratica di controllare la propagazione di un fascio lu-

1

minoso attraverso altra luce. In questo lavoro di tesi studiamo l'interazione di due soli fasci contropropagantisi all'interno di cristalli fotorifrattivi che è una delle situazioni più semplici nell'ambito dell'interazione non lineare tra i fasci ottici. Lo sviluppo di un nuovo metodo numerico per integrare le equazioni di propagazione, ci consente di studiare una situazione alquanto generale. Come caso particolare dell'interazione tra i fasci si è studiata una situazione in cui la propagazione di uno di essi è influenzata "esclusivamente" dall'altro, semplicemente utilizzando le proprietà della non linearità fotorifrattiva. Questo esempio è concettualmente molto interessante, perché in linea di principio l'indice di rifrazione in cui si muove uno dei fasci è completamente determinato dall'altro contropropagantesi: esiste dunque la speranza di realizzare un dispositivo nel quale la propagazione di un fascio luminoso è completamente controllata da altra luce e dotato quindi di un alto grado di "regolabilità".

2

Introduzione

Illuminando con radiazione ottica i cristalli fotorifrattivi, (es:GaAs,InP,ecc.) i portatori di carica, inizialmente intrappolati nelle impurezze, vengono eccitati in banda di conduzione. A causa della diffusione o per l'azione di un campo elettrico, questi portatori si ridistribuiscono e, all'equilibrio, la presenza di una distribuzione disomogenea di carica crea un campo elettrostatico o campo di carica spaziale.

Ciò che distingue questi cristalli dai comuni semiconduttori è che un fascio di luce dell'intensità dell'ordine del $\frac{watt}{cm^2}$, incidendo su un materiale fotorifrattivo, è in grado

di indurre una variazione spaziale dell'indice di rifrazione (effetto elettroottico). L'aspetto notevole è dato dal fatto che tale variazione dell'indice di rifrazione influenza a sua volta il comportamento della radiazione ottica che si propaga nel mezzo: questo pone il problema della propagazione nei cristalli fotorifrattivi nel dominio dell'ottica non lineare.

3

1.1 Modello di trasporto

Per i materiali fotorifrattivi lo schema dei livelli energetici è quello tipico dei semiconduttori drogati con impurezze del tipo n e p:



Gli atomi donori possono essere ionizzati dai fotoni ottici. Infatti, nei materiali fotorifrattivi, il salto energetico tra la banda di conduzione e il livello dei donori cade nella regione visibile dello spettro elettromagnetico.

Una condizione importante del modello è che il numero degli atomi donori è molto più grande di quello degli accettori. Questa ipotesi non solo consente di affermare che c'è un solo portatore di carica, ma anche che tutti gli atomi accettori sono praticamente ionizzati ad ogni tempo e anche in assenza di radiazione ottica. La funzione degli atomi accettori è comunque importante: essi introducono delle "trappole" in più per gli elettroni e quindi creano un meccanismo efficace di separazione delle cariche, fondamentale per l'effetto fotorifrattivo [1].

La risposta del mezzo alla sollecitazione ottica è efficacemente descritta dalle **equazioni di trasporto** [2,6,7]:

$$\frac{\partial N_D^+}{\partial t} = (\beta + sI) \left(N_D - N_D^+ \right) - \gamma N_e N_D^+$$
(1.1-1)

$$\rho = q \left(N_D^+ - N_A - N_e \right) \tag{1.1-2}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{\epsilon} \mathbf{E}) = \mathbf{\rho} \tag{1.1-3}$$

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = 0 \tag{1.1-4}$$

$$\mathbf{J} = q\mu N_e \mathbf{E} + \mu K_B T \,\nabla N_e \tag{1.1-5}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{\rho}}{\partial t} = 0 \tag{1.1-6}$$

in cui:

	N_D	densità di atomi donori
	N_D^+	densità di atomi donori ionizzati
	N_e	densità di elettroni in banda di conduzione
	N_A	densità di atomi accettori
	Ι	intensità della radiazione ottica
	<i>S</i>	sezione d'urto di fotoionizzazione
	β	coefficiente di emissione termica
,	γ	coefficiente di ricombinazione elettrone donore
(q	carica dell'elettrone
1	8	costante dielettrica a basse frequenze
	μ	mobilità degli elettroni
	K _B	costante di Boltzmann
	Т	temperatura assoluta
	ρ	densità di carica
	J	vettore densità di corrente elettronica

La prima equazione lega l'intensità della radiazione ottica incidente al numero dei donori ionizzati per unità di tempo e di volume e tiene conto dell'effetto di ricombinazione elettrone donore. Le altre equazioni sono ben note in fisica e non richiedono ulteriori commenti.

All'equilibrio, l'equazione 1.1-1 può essere posta uguale a zero, mentre l'ipotesi di bassa intensità della radiazione ottica incidente consente di porre l'equazione 1.1-2 nella forma:

$$\rho \approx q \left(N_D^+ - N_A \right) \tag{1.1-7}$$

essendo, evidentemente

$$\left|N_{D}^{+} - N_{A}\right| \gg N_{e} \tag{1.1-8}$$

Questa ipotesi non è molto stringente come sembrerebbe a prima vista. In effetti, è possibile mostrare che, affinché l'ipotesi sulla equazione 1.1-2 sia valida, è sufficiente che l'intensità della radiazione ottica risulti molto minore di un valore dell'ordine di grandezza di $10^6 \frac{watt}{cm^2}$, che risulta essere circa un milione di volte più grande dell'intensità con cui normalmente si lavora con i materiali fo-

torifrattivi.

1.2 Regimi

Occorre distinguere due casi:

- a. Una differenza di potenziale V è applicata al cristallo (caso drift)
- b. Non è applicata una differenza di potenziale (caso diffusivo)

Caso a



La condizione al contorno, in questo caso, è imposta dalla relazione integrale che lega il potenziale al campo di carica spaziale:

$$V = -\int_{\lambda} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{d} \mathbf{r}$$
(1.2-1)

in cui λ è una qualsiasi curva che collega l'elettrodo a potenziale minore con quello a potenziale maggiore. Richiedendo che λ sia un segmento parallelo all'asse *x* si ha:

$$V = -\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} E_x(x, y, z) dx$$
(1.2-2)

dove, naturalmente, E_x è la componente del campo lungo la direzione dell'asse *x*.

Caso b

Se il cristallo è isolato, non può esserci scambio di carica elettrica con l'esterno. Ne consegue che la componente del vettore densità di corrente lungo la normale $\hat{\mathbf{n}}$ alla superficie esterna del cristallo deve essere zero : $\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$ Le equazioni di trasporto, **all'equilibrio** e nell'ipotesi di validità della condizione 1.1-7 sono:

$$(\beta + sI) (N_D - N_D^+) - \gamma N_e N_D^+ = 0$$
(1.2-3)

$$\rho = q \, (N_D^+ - N_A) \tag{1.2-4}$$

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{E}) = \boldsymbol{\rho} \tag{1.2-5}$$

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = 0 \tag{1.2-6}$$

$$\mathbf{J} = q\mu N_e \mathbf{E} + \mu K_B T \,\nabla N_e \tag{1.2-7}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{1.2-8}$$

Dopo qualche passaggio, si riesce a scrivere un'equazione in cui compare solo il campo di carica spaziale in termini di grandezze note sperimentalmente [8,10,11]:

$$\nabla \cdot \left[q\mu \frac{\frac{N_D - N_A}{N_A} - \nabla \cdot \left(\frac{\varepsilon}{qN_A} \mathbf{E}\right)}{1 + \nabla \cdot \left(\frac{\varepsilon}{qN_A} \mathbf{E}\right)} \frac{\beta + sI}{\gamma} \mathbf{E} \right] + \mu K_B T \nabla^2 \left[\frac{\frac{N_D - N_A}{N_A} - \nabla \cdot \left(\frac{\varepsilon}{qN_A} \mathbf{E}\right)}{1 + \nabla \cdot \left(\frac{\varepsilon}{qN_A} \mathbf{E}\right)} \frac{\beta + sI}{\gamma} \right] = 0$$

(1.2-9)

Introduciamo grandezze adimensionali:

$$\alpha = \frac{N_D - N_A}{N_A} \tag{1.2-10}$$

$$I_b = \frac{\beta}{s} \tag{1.2-11}$$

$$Q = 1 + \frac{I}{I_b} \tag{1.2-12}$$

$$K_D = q \sqrt{\frac{N_A}{\varepsilon K_B T}}$$
(1.2-13)

$$E_D = \frac{K_B T}{q} K_D \tag{1.2-14}$$

$$\mathbf{Y} = \frac{\mathbf{E}}{E_D} \tag{1.2-15}$$

con le posizioni:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = K_D \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$
 (1.2-16)

$$\tilde{\nabla} = \frac{1}{K_D} \nabla \tag{1.2-17}$$

L'equazione 1.2-9 diventa così:

Tesi di laurea di Raimondo Valeri

$$\tilde{\nabla} \cdot \left[\frac{\alpha - \tilde{\nabla} \cdot \mathbf{Y}}{1 + \tilde{\nabla} \cdot \mathbf{Y}} Q \mathbf{Y} + \tilde{\nabla} \left(\frac{\alpha - \tilde{\nabla} \cdot \mathbf{Y}}{1 + \tilde{\nabla} \cdot \mathbf{Y}} Q \right) \right] = 0$$
(1.2-18)

L'equazione è, evidentemente, trattabile solo se si introducono delle opportune semplificazioni. Quella di cui faremo uso è la seguente:

$$\left| \tilde{\nabla} \cdot \mathbf{Y} \right| << 1 \tag{1.2-19}$$

E' importante osservare che tale limitazione **non è a priori verificata** e deve essere controllata una volta risolta l'equazione semplificata. Il significato fisico della condizione 1.2-19 appare chiaro:

$$\tilde{\nabla} \cdot \mathbf{Y} = \frac{1}{E_D K_D} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{N_D^+ - N_A}{N_A}$$
(1.2-20)

e quindi

$$\left|N_{D}^{+}-N_{A}\right| \ll N_{A} \tag{1.2-21}$$

La 1.2-21 impone una ulteriore condizione sull'intensità della radiazione ottica che può essere utilizzata (al "buio" $N_D^+ \approx N_A$). Tenendo presente che il valore tipico, nell'equazione 1.2-18, del parametro α è dell'ordine di 100, possiamo finalmente scrivere:

$$\tilde{\nabla} \cdot \left[Q \mathbf{Y} + \tilde{\nabla} Q \right] = 0 \tag{1.2-22}$$

1.3 Caso monodimensionale

Una considerevole semplificazione delle equazioni del modello si ottiene considerando la situazione in cui l'intensità della radiazione in seno al cristallo dipende prevalentemente da una coordinata spaziale, diciamo \tilde{x} . Limitiamoci così a considerare fasci ottici soddisfacenti

alle limitazioni:

$$\left| \frac{\partial Q}{\partial \tilde{y}} \right| \gg \left| \frac{\partial Q}{\partial \tilde{z}} \right| \qquad \qquad \left| \frac{\partial Q}{\partial \tilde{x}} \right| \gg \left| \frac{\partial Q}{\partial \tilde{z}} \right| \qquad (1.3-1)$$

da verificare a posteriori sulle predizioni della teoria.

Sperimentalmente è possibile fare in modo che la radiazione incidente, e quindi Q, non dipenda da una delle coordinate spaziali (ad esempio \tilde{y}). Le *strisce di luce* realizzano, se si trascurano gli effetti ai bordi, questa condizione.

E' possibile mostrare che, nel caso monodimensionale, il campo di carica spaziale \mathbf{E} è diretto secondo l'asse x e non dipende dalle altre due coordinate spaziali. L'equazione 1.2-19 diventa quindi:

$$\frac{d}{d\tilde{x}} \left[QY + \frac{dQ}{d\tilde{x}} \right] = 0 \tag{1.3-2}$$

Richiedendo che l'intensità della radiazione ottica e la sua derivata prima si annullino ai bordi è possibile mostrare che:

$$\mathbf{Y} = \left(-\frac{d}{d\tilde{x}}\log(Q) + \frac{Y_{\infty}}{Q}\right)\hat{i}$$
(1.3-3)

in cui \hat{i} è, naturalmente, il versore lungo l'asse \tilde{x} , mentre, dopo aver posto $\xi = \frac{K_D l}{2}$, nel caso drift si ha

$$Y_{\infty} = -\frac{K_D V}{E_D \int_{-\xi}^{\xi} \frac{1}{Q} d\tilde{x}}$$
(1.3-4)

e, nel caso diffusivo

$$Y_{\infty} = 0 \tag{1.3-5}$$

Riteniamo utile riportare qui, alcuni valori tipici delle grandezze introdotte in questo capitolo:

$$N_A \approx 10^{16} - 10^{17} cm^{-3}, N_D \approx 10^{18} - 10^{19} cm^{-3}$$

 $E_D \approx 300 \frac{Volt}{cm}, \frac{E_D}{K_D} \approx 10^{-2} Volt$

2.1 Propagazione ottica nei mezzi non lineari. Generalità

L'equazione differenziale che descrive la propagazione di un campo di radiazione, $\mathbf{E}^{R}(\mathbf{r},t)$, in un mezzo dielettrico, è la seguente [13]:

$$\nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{E}^{R}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c^{2}} \frac{\partial^{2} \mathbf{E}^{R}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^{2}} = -\mu_{0} \frac{\partial^{2} \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^{2}}$$
 (2.1-1)

in cui $\mathbf{P}(\mathbf{r},t)$ è il momento di dipolo elettrico per volume unitario.

Nei dielettrici lineari la relazione esistente tra la i^{esima} componente di $\mathbf{P}(\mathbf{r},t)$ e il campo di radiazione è della forma [12]:

$$P_{i}(\mathbf{r},t) = \varepsilon_{0} \int_{0}^{\infty} d\tau \,\chi_{ij}(\mathbf{r},\tau) \,E_{j}^{R}(\mathbf{r},t-\tau)$$
(2.1-2)

in cui χ_{ij} è il tensore di suscettività dielettrica e si sottintende la convenzione di somma sugli indici ripetuti. Osserviamo che questa è la più generale relazione lineare e causale tra la polarizzazione (effetto) e campo di radiazione (causa).

Si è visto che, nei cristalli fotorifrattivi, la luce incidente genera, all'equilibrio, un campo elettrostatico $\mathbf{E}(\mathbf{r})$. In prima approssimazione possiamo ritenere che l'effetto di questo campo sia quello di aggiungere al tensore di suscettività dielettrica un contributo lineare in $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ (effetto elettroottico):

$$P_{i}(\mathbf{r},t) = \varepsilon_{0} \int_{0}^{\infty} d\tau \left[\chi_{ij}(\mathbf{r},\tau) + \phi_{ijk}(\mathbf{r},\tau) E_{k} \right] E_{j}^{R}(\mathbf{r},t-\tau)$$
(2.1-3)

L'equazione differenziale 2.1-1 diventa quindi:

$$\left(\nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{E}^{R}(\mathbf{r}, t)\right)_{i} + \frac{1}{c^{2}} \frac{\partial^{2} E_{i}^{R}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^{2}} = -\mu_{0} \varepsilon_{0} \frac{\partial^{2}}{\partial t^{2}} \left[\int_{0}^{\infty} d\tau \left(\chi_{ij}(\mathbf{r}, \tau) + \phi_{ijk}(\mathbf{r}, \tau) E_{k} \right) E_{j}^{R}(\mathbf{r}, t - \tau) \right]$$

$$(2.1-4)$$

La 2.1-4 si semplifica osservando che:

$$\nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{E}^{R}(\mathbf{r},t) = -\nabla^{2} \mathbf{E}^{R} + \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}^{R}) \approx -\nabla^{2} \mathbf{E}^{R}$$
 (2.1-5)

Infatti, il termine contenente la divergenza è importante solo se la scala di variazione dell'indice di rifrazione è confrontabile con la lunghezza d'onda della radiazione incidente.

L'equazione 2.1-4, nello spazio reale, assume, pertanto, la forma:

$$-\nabla^{2} E^{R}(\mathbf{r}, t)_{i} + \frac{1}{c^{2}} \frac{\partial^{2} E^{R}_{i}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^{2}} =$$

$$-\mu_{0} \varepsilon_{0} \frac{\partial^{2}}{\partial t^{2}} \left[\int_{0}^{\infty} d\tau \left(\chi_{ij}(\mathbf{r}, \tau) + \phi_{ijk}(\mathbf{r}, \tau) E_{k} \right) E^{R}_{j}(\mathbf{r}, t - \tau) \right]$$

$$(2.1-6)$$

Mentre, nello spazio di Fourier si trasforma in:

$$\nabla^2 E_{\omega}^R(\mathbf{r})_i + k_0^2 \left(\delta_{ij} + \chi_{\omega_{ij}} + \phi_{\omega_{ijk}} E_k \right) E_{\omega}^R(\mathbf{r})_j = 0$$
(2.1-7)

con

$$\chi_{\omega_{ij}} = \int_{0}^{\infty} d\tau \,\chi_{ij}(\mathbf{r},\tau) e^{-i\omega\tau}$$
$$\phi_{\omega_{ijk}} = \int_{0}^{\infty} d\tau \,\phi_{ijk}(\mathbf{r},\tau) e^{-i\omega\tau}$$

La 2.1-7 si ricava ricordando che per le funzioni a quadrato sommabile valgono le relazioni di Fourier:

Tesi di laurea di Raimondo Valeri

$$f(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega f_{\omega}(\mathbf{r}) e^{i\omega t}$$
(2.1-8)

$$f_{\omega}(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{t} f(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega t}$$
(2.1-9)

e:

$$f_1 * f_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau f_1(\mathbf{r}, \tau) f_2(\mathbf{r}, t - \tau) = c(\mathbf{r}, t)$$
(2.1-10)

che definisce il prodotto convolutorio per cui vale il teorema di convoluzione:

$$c_{\omega}(\mathbf{r}) = f_{1_{\omega}}(\mathbf{r}) f_{2_{\omega}}(\mathbf{r})$$
(2.1-11)

2.2 I coefficienti elettroottici

Introduciamo alcune relazioni tensoriali:

$$\underline{\underline{n}}^2 = I + \underline{\underline{\chi}} \tag{2.2-1}$$

$$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\varepsilon}_0 \left(\boldsymbol{I} + \underline{\boldsymbol{\chi}} \right) \tag{2.2-2}$$

$$\underline{\underline{\eta}} \, \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\varepsilon}_0 \, I \tag{2.2-3}$$

\underline{n} è il tensore indice di rifrazione

 $\underline{\chi}$ è il tensore di suscettività dielettrica

I è la matrice identità 3x3.

Osserviamo che, per definizione, $\phi_{ijk}E_k$ è la correzione $\Delta \chi_{ij}$ al tensore suscettività dielettrica [3,9]:

$$\Delta \chi_{ij} = \phi_{ijk} E_k \tag{2.2-4}$$

Una relazione analoga vale anche per il tensore $\underline{\eta}$:

$$r_{ijk}E_k = \Delta \eta_{ij} \tag{2.2-5}$$

in cui r_{ijk} sono, per definizione, i coefficienti elettroottici del mezzo.

E' possibile mostrare che esistono sempre tre direzioni mutuamente ortogonali, per le quali, in assenza di effetto elettroottico, questi tensori risultano diagonali (assi principali).

Ponendo

$$\underline{\mathbf{e}} = \underline{\mathbf{e}}^{(0)} + \Delta \underline{\mathbf{e}}$$
$$\underline{\mathbf{n}} = \underline{\mathbf{n}}^{(0)} + \Delta \underline{\mathbf{n}}$$
$$\underline{\mathbf{\chi}} = \underline{\mathbf{\chi}}^{(0)} + \Delta \underline{\mathbf{\chi}},$$

in cui si evidenziano i tensori del cristallo "al buio" e le correzioni dovute all'effetto elettroottico, si ricava dalla 2.2-3:

$$\Delta \underline{\mathbf{\varepsilon}} = -\underline{\mathbf{\eta}}^{(0)^{-1}} \Delta \underline{\mathbf{\eta}} \ \underline{\mathbf{\varepsilon}}^{(0)}$$
(2.2-6)

$$\Delta \varepsilon_{ij} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \varepsilon_{ik}^{(0)} \Delta \eta_{kh} \varepsilon_{hj}^{(0)}$$
(2.2-7)

Lungo gli assi principali del cristallo, $\underline{\epsilon}^{(0)}$ e $\underline{\underline{\eta}}^{(0)}$ sono dia-

gonali e la relazione 2.2-7 assume una forma semplice:

$$\Delta \varepsilon_{ij} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \varepsilon_i^{(0)} \Delta \eta_{ij} \varepsilon_j^{(0)}$$
(2.2-8)

e quindi:

$$\Delta \chi_{ij} = -n_i^2 n_j^2 r_{ijk} E_k$$
(2.2-9)

da cui:

$$\phi_{ijk} = -n_i^2 n_j^2 r_{ijk} \tag{2.2-10}$$

2.3 Equazioni accoppiate di due fasci contropropaganti

Nel capitolo 1 abbiamo dimostrato che, in certe condizioni, è possibile esprimere il campo di carica spaziale nella forma:

$$\mathbf{E}(x) = \left(-\frac{E_D}{K_D}\frac{1}{Q}\frac{dQ}{dx} + \frac{E_DY_{\infty}}{Q}\right)\hat{i}$$
(2.3-1)



Nel seguito supporremo che $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ rappresentino le tre direzioni principali del cristallo.

Assumendo che la radiazione sia polarizzata lungo \hat{i} e che sia $\mathbf{E}_{\omega}^{R} = E_{\omega}^{R} \hat{i}$, l'equazione 2.1-7 assume, nel riferimento principale la forma:

$$\nabla^2 E_{\omega}^R(x,z) + k_0^2 \left(1 + \chi_{\omega_{11}} + \phi_{\omega_{111}} E \right) E_{\omega}^R(x,z) = 0$$
(2.3-2)

ovvero:

$$\nabla^2 E_{\omega}^R(x,z) + k_0^2 (n^2 + \phi E) E_{\omega}^R(x,z) = 0$$
(2.3-3)

$$\left(n^2 = 1 + \chi_{\omega_{11}}, \ \varphi = \varphi_{\omega_{111}}\right)$$

L'oggetto di questo lavoro di tesi è lo studio dell'interazione di due fasci luminosi che si propagano in direzioni opposte in un cristallo fotorifrattivo (fig.4)

Ricordando che una striscia di luce è, per definizione, un campo di radiazione la cui intensità è indipendente da una delle tre coordinate spaziali (y nel nostro caso), non occorre imporre alcuna condizione al contorno sulle facce perpendicolari al versore \hat{j} . Infatti, potendo ritenere il cristallo infinito lungo tale direzione, il problema è dotato di invarianza per traslazioni lungo \hat{j} . Richiedendo, inoltre, che i fasci abbiano dimensioni trasversali (lungo \hat{i}) molto minori dell'altezza del cristallo (1), possiamo ritenere infinita la distanza tra le facce perpendicolari a \hat{i} e la luce e imporre la condizione al bordo:

$$\lim_{x \to \pm \infty} E_{\omega}^{R}(x,z) = 0$$
(2.3-4)

Il problema delle condizioni al bordo da imporre sulle facce perpendicolari a \hat{k} è più sottile: il campo risultante su ciascuna delle superfici, z=0 e z=L, è dato, infatti, dalla somma di quello incidente e di quello che si propaga in direzione opposta. Questo problema al contorno non è affatto banale, perché nelle condizioni al bordo compaiono quantità che devono essere determinate dal problema stesso. Vediamo come questo problema si aggira nel caso in cui non è presente l'effetto elettroottico. L'equazione da risolvere è, in questo caso:

$$\nabla^{2} E_{\omega}^{R}(x,z) + k^{2} E_{\omega}^{R}(x,z) = 0$$

$$(2.3-5)$$

$$(k = k_{0}n)$$

Richiedendo, per la 2.3-5, la soluzione di prova

$$E_{\omega}^{R}(x,z) = D(k_{x},k_{z})e^{ik_{x}x}e^{ik_{z}z}$$
(2.3-6)

si ha che la condizione sui numeri d'onda risulta imposta dalla relazione seguente:

$$k^2 = k_x^2 + k_z^2 \tag{2.3-7}$$

L'indice di rifrazione del mezzo e il vettore d'onda della radiazione incidente determinano, secondo la 2.3-7, i valori di k_x e k_z che caratterizzano la soluzione del problema, l'espressione più generale della quale è data dalla sovrapposizione di tutte le possibili:

$$E_{\omega}^{R}(x,z) = E^{+} + E^{-}$$
(2.3-8)

in cui

$$E^{+} = \int_{-\infty}^{\infty} D_{+}(k_{x}) e^{ik_{x}x} e^{iz\sqrt{k^{2}-k_{x}^{2}}} dk_{x}$$
(2.3-9)

$$E^{-} = \int_{-\infty}^{\infty} D_{-}(k_{x}) e^{ik_{x}x} e^{-iz\sqrt{k^{2}-k_{x}^{2}}} dk_{x}$$
(2.3-10)

$$k_z = \pm \sqrt{k^2 - k_x^2}$$
(2.3-11)

Il primo e il secondo termine, nella 2.3-8, rappresentano dei campi che si propagano, rispettivamente, nel senso delle z crescenti e delle z decrescenti (essendo il fattore temporale dei campi uguale a $e^{-i\omega t}$).

Vedremo tra un attimo come queste osservazioni consentono di risolvere il problema delle condizioni al contorno da imporre a z=0 e a z=L.

Una approssimazione di cui si fa spesso uso è la cosiddet-

ta *approssimazione parassiale* che consiste nel trattare campi la cui estensione nello spazio di Fourier trasverso (k_x) è molto più piccola di k.

Si può concludere, pertanto, che negli integrali è possibile utilizzare lo sviluppo:

$$\sqrt{k^2 - k_x^2} \approx k \left(1 - \frac{1}{2} \frac{k_x^2}{k^2} \right)$$
(2.3-12)

e quindi

$$E^{+} \approx e^{ikz} \int_{-\infty}^{\infty} D_{+}(k_{x}) e^{ik_{x}x} e^{-i\frac{k_{x}^{2}z}{2k}} dk_{x}$$
(2.3-13)

$$E^{-} \approx e^{-ikz} \int_{-\infty}^{\infty} D_{-}(k_{x}) e^{ik_{x}x} e^{i\frac{k_{x}^{2}z}{2k}} dk_{x}$$
(2.3-14)

$$E_{\omega}^{R}(x,z) = E^{+} + E^{-}$$
(2.3-15)

$$A_{1,2} = \int_{-\infty}^{\infty} D_{\pm}(k_x) e^{ik_x x} e^{mi\frac{k_x^2 z}{2k}} dk_x$$
(2.3-16)

L'approssimazione parassiale comporta, inoltre:

$$\begin{cases} \frac{1}{2k} \frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2} + i \frac{\partial A_1}{\partial z} = 0\\ \frac{1}{2k} \frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2} - i \frac{\partial A_2}{\partial z} = 0 \end{cases}$$
(2.3-17)

Essendo le 2.3-17 del primo ordine in $\frac{\partial}{\partial z}$ è sufficiente per

esse imporre come condizione al contorno:

$$A_1(x,0) = f_1(x)$$

 $A_2(x,L) = f_2(x),$

considerando che esse descrivono fasci contropropaganti, rispettivamente incidenti da sinistra e da destra.

Basandoci sulle argomentazioni precedenti, inerenti il caso libero, richiediamo che la soluzione dell'equazione differenziale 2.3-3 abbia la forma:

$$E_{\omega}^{R}(x,z) = A_{1}(x,z)e^{i\beta z} + A_{2}(x,z)e^{-i\beta z}$$
(2.3-18)

Richiedendo, come per il caso lineare, che $f_1(x)$ e $f_2(x)$ eccitino rispettivamente la parte propagantesi verso destra e verso sinistra del campo (fig4) imponiamo, per le condizioni al bordo, le relazioni:

$$A_1(x,0) = f_1(x)$$
(2.3-19)

$$A_2(x,L) = f_2(x) \tag{2.3-20}$$

Osserviamo che, dovendo valere la limitazione 1.3-1, è necessario imporre un'ulteriore richiesta sulla coerenza mutua dei campi che si propagano nel cristallo. Essendo, infatti

$$\left|\frac{\partial I}{\partial z}\right| << \left|\frac{\partial I}{\partial x}\right|.$$

Vediamo che ponendo

 $A_1 = |A_1|e^{i\phi_1(x,z)}$ (2.3-21)

$$A_2 = |A_2| e^{i\phi_2(x,z)}$$
(2.3-22)

segue

$$I = \left|\mathbf{E}_{\omega}^{R}(x,z)\right|^{2} = \left|A_{1}\right|^{2} + \left|A_{2}\right|^{2} + 2A_{1}A_{2}\cos\left(\Delta\phi + 2\beta z\right)$$
(2.3-23)

A causa della presenza, nella 2.3-23, di un termine interferenziale la cui scala di variazione spaziale rispetto a z è dell'ordine della lunghezza d'onda, occorre, se si vuole restare nel dominio di validità della 1.3-1, richiedere che i due fasci abbiano fasi statisticamente scorrelate:

$$I = |A_1|^2 + |A_2|^2$$
(2.3-24)

Supponiamo ora di essere in regime di drift :

$$\frac{Y_{\infty}}{Q} >> \left| \frac{1}{K_D} \frac{1}{Q} \frac{dQ}{dx} \right|$$
(2.3-25)

Siano:

$$n = n_0 + i\alpha \tag{2.3-26}$$

$$\beta = k_0 \sqrt{n_0^2 - \alpha^2} \approx k_0 n_0 = k$$
(2.3-27)

$$\gamma = \frac{k_0^2 n_0 \alpha}{\beta} \tag{2.3-28}$$

$$\theta = \frac{k_0^2}{\beta} \frac{n_0^4 r E_D Y_\infty}{2} \tag{2.3-29}$$

$$n^{2} + \phi E = \left(n + \delta n\right)^{2} \approx n^{2} + 2n\delta n \qquad (2.3-30)$$

$$r_{111} = r$$
 (2.3-31)

$$\delta n = \frac{-n_0^3 r}{2} \left(\frac{-E_D}{K_D} \frac{1}{Q} \frac{dQ}{dx} + \frac{E_D Y_\infty}{Q} \right)$$
(2.3-32)

Le approssimazioni 2.3-27 e 2.3-30 si ottengono osservando che, tipicamente, si ha: $n_0 \approx 2$, $k_0 \approx 15 \mu m^{-1}$, $\gamma \approx 10^{-4} \mu m^{-1}$, men-

tre, essendo
$$\alpha = \frac{n_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{n_0 k_0}{\gamma}\right)^2}}$$
, segue $\alpha << n_0$.

Ricordando che

$$Q = 1 + \frac{1}{I_b} \left(\left| A_1 \right|^2 + \left| A_2 \right|^2 \right)$$

e inserendo la 2.3-18 nella 2.3-3, dopo aver trascurato le derivate seconde rispetto a z degli inviluppi A_1 e A_2 , si hanno le equazioni accoppiate per i fasci :

$$\frac{1}{2k}\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}A_{1} + i\frac{\partial}{\partial z}A_{1} + i\gamma A_{1} = \frac{\theta}{1 + \frac{1}{I_{b}}\left(\left|A_{1}\right|^{2} + \left|A_{2}\right|^{2}\right)}A_{1}$$
(2.3-33)

$$\frac{1}{2k}\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}A_{2} - i\frac{\partial}{\partial z}A_{2} + i\gamma A_{2} = \frac{\theta}{1 + \frac{1}{I_{b}}\left(\left|A_{1}\right|^{2} + \left|A_{2}\right|^{2}\right)}A_{2}$$
(2.3-34)

che, con le condizioni al contorno,

$$A_1(x,0) = f_1(x)$$

 $A_2(x,L) = f_2(x)$

devono essere studiate negli intervalli

$$x \in (-\infty, +\infty)$$
$$z \in (0, L)$$

Nel capitolo 1 abbiamo dato una interpretazione per I_b :

essa è legata al coefficiente di emissione termica dalla relazione:

$$I_b = \frac{\beta}{s}$$

Osserviamo che l'effetto di un ulteriore illuminamento *uniforme* del cristallo (luce di fondo) è equivalente ad "aumentare" il coefficiente β .

Supporremo, nel seguito, di illuminare il cristallo con luce di fondo, diretta lungo il versore \hat{j} , ottenuta con due fasci "larghi"(onde piane), incoerenti, propagantisi in senso opposto. In questo modo è possibile ritenere che, al primo ordine, I_b sia effettivamente uniforme in tutto il cristallo. Dovendo, infatti, essere

$$I_b \propto \left(e^{-\gamma} + e^{\gamma}\right) \tag{2.3-35}$$

e

 $\gamma \approx 10^{-4}\,\mu m^{-1},$

ed essendo, tipicamente, dell'ordine di 0.5 cm la dimensione lineare dei cristalli fotorifrattivi, lo sviluppo di Taylor, arrestato al primo termine in γy , risulta costante. Per risolvere le equazioni 2.3-33 e 2.3-34 occorre ancora legare θ al potenziale V, imposto dall'esterno sulle facce perpendicolari a \hat{i} :

$$V = -\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} dx \frac{E_D}{Q} Y_{\infty}$$

Dato che le dimensioni lungo \hat{i} dei fasci risultano essere, come visto, molto più piccole dell'altezza (l) del cristallo si ha:

$$V \approx -E_D Y_\infty l \tag{2.3-36}$$

ovvero

$$\Theta \approx -\frac{1}{2}kn_0^2 r \frac{V}{l}$$
(2.3-37)

L'espressione per l'indice di rifrazione risulta essere:

$$\tilde{n} = n + \frac{n_0^3 r}{2} \frac{1}{Q} \frac{V}{l}$$
(2.3-38)

Se V < 0 l'indice di rifrazione è massimo dove l'intensità

totale della radiazione è massima.

Nel seguito supporremo sempre di essere in queste condizioni.

2.4 Interazione di due fasci contropropaganti

Osservando le 2.3-33 e 2.3-34 si vede come l'interazione tra i due fasci sia di un tipo particolarmente forte in quanto, oltre la non linearità intrinseca, si manifesta un accoppiamento tra la parte "iniziale" di un fascio e quella "finale" dell'altro, dando origine a un meccanismo di retroazione o *feedback* [4].

Consideriamo la regione $z \in (0, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Questa regione spaziale viene vista dal campo A_1 come "iniziale": la propagazione di questo fascio ha origine, infatti, in z = 0.

 A_1 risente, in questa regione, dell'influenza del campo A_2 per il quale la stessa zona è vista come "finale": A_2 "parte" da z = L.

Consideriamo la zona $z \in (L-\varepsilon, L)$, $\varepsilon > 0$. A_2 , in questa regione, risente localmente di A_1 e quindi porta, presso z=0, informazioni inerenti la parte "finale" del primo campo.

Tutto va come se ciascun fascio avvertisse, durante la propagazione, se stesso in più punti del cristallo: questo è, appunto, un meccanismo di retroazione.

Per meglio comprendere questo aspetto, immaginiamo di irradiare il cristallo con due fasci luminosi che si distinguono soltanto per il verso di propagazione. Richiediamo, cioè, che i profili dei campi a z=0 e a z=L siano uguali: $f_1(x) = f_2(x) \quad \forall x \in \Re$.



contropropaganti

Sia $d(\alpha,\beta)$ la distanza euclidea tra due punti sulla retta reale.

Sia
$$d(0,z) = d(z', L)$$
. (fig. 5) (2.4-1)

Dalla simmetria del problema segue:

 $A_1(x,z) = A_2(x,z')$

ma, essendo, z' = L - z, si ha:

$$A_1(x,z) = A_2(x,L-z)$$
(2.4-2)

L'equazione 2.3-33 diventa:
Tesi di laurea di Raimondo Valeri

$$\left(\frac{1}{2k}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + i\frac{\partial}{\partial z} + i\gamma\right)A_1 = \frac{\theta}{1 + \frac{1}{I_b}\left(\left|A_1(x,z)\right|^2 + \left|A_1(x,L-z)\right|^2\right)}A_1 \qquad (2.4-3)$$

che è, manifestamente, non locale: il 2° membro dell'equazione ha una dipendenza da A_1 , calcolato in punti diversi del cristallo. Una relazione analoga vale, ovviamente, anche per la (2.3-34).

Riteniamo interessante osservare che, anche per il caso simmetrico, esiste un "regime solitonico" se i profili sono scelti in modo opportuno, come per il caso di un solo fascio incidente sul cristallo.

Per provare quanto affermato, nella 2.4-3, richiediamo la soluzione di prova, $A_1(x,z) = u(x) e^{i\sigma z} e^{-\gamma z}$, in cui u(x) è un profilo da determinare. Inserendo questa soluzione nella 2.4-3 si ottiene, per il profilo imposto, l'equazione:

$$\frac{1}{2k}\frac{d^{2}u}{dx^{2}} - \frac{\theta}{1 + \frac{|u(x)|^{2}\left(e^{-2\gamma z} + e^{-2\gamma(L-z)}\right)}{I_{b}}} u = \sigma u$$
(2.4-4)

Per i cristalli fotorifrattivi di interesse si ha $\gamma \approx 0.5 \ cm^{-1}$ e $L \approx 0.5 \ cm$. Queste stime consentono di porre:

$$e^{-2\gamma z} + e^{-2\gamma(L-z)} = 2e^{-\gamma L} \cosh[\gamma(L-2z)] \approx 2e^{-\gamma L} \left[1 + \gamma^2 \left(z - \frac{L}{2}\right)^2\right] \approx 2e^{-\gamma L}$$

e, pertanto, l'equazione per il profilo, che garantisce una soluzione non diffrattiva su tutto il volume del cristallo, è :

$$\frac{1}{2k}\frac{d^{2}u}{dx^{2}} - \frac{\theta}{1 + \frac{|u(x)|^{2}2e^{-\gamma L}}{I_{b}}}u = \sigma u$$
(2.4-5)

che è proprio l'equazione per i solitoni spaziali fotorifrattivi (a parte il fattore $2e^{-\gamma L}$ che può essere inglobato nell'intensità di fondo).

Le equazioni più generali che descrivono il comportamento di due fasci contropropaganti (2.3-33, 2.3-34) in un cristallo fotorifrattivo sono molto difficili da integrare e i risultati analitici che possono essere dedotti da esse sono esigui. Nel capitolo 4 vedremo, comunque, che, introducendo delle opportune condizioni, si riesce a dare un minimo di descrizione analitica per i fasci.

Ciò che ci preme mettere in risalto qui è che, sebbene le equazioni differenziali 2.3-33 e 2.3-34 risultino analiticamente "proibitive", il modello di Kukhtarev [1] consente di ottenere, dopo l'introduzione di opportune condizioni, un'espressione compatta della funzione che descrive la modulazione dell'indice di rifrazione.

La descrizione dell'interazione di due campi è molto inte-

ressante, sia dal punto di vista teorico che da quello applicativo. In effetti, uno degli aspetti più importanti dell'ottica non lineare è connesso con la possibilità di influenzare il comportamento della radiazione con la luce stessa. Tale possibilità è esaltata negli esperimenti in cui si hanno due fasci contropropaganti: l'interazione tra i due campi determina, in generale, il comportamento di entrambi, ma esiste anche la possibilità di controllarne uno usando l'altro. A tal fine richiediamo che l'intensità di un fascio di luce sia molto più grande di quella dell'altro. Per fissare le idee imponiamo che il campo con maggiore intensità sia quello che "parte" da z=L. Le equazioni 2.3-33 e 2.3-34 si semplificano nelle seguenti:

$$\frac{1}{2k}\frac{\partial^2}{\partial x^2}A_1 + i\frac{\partial}{\partial z}A_1 + i\gamma A_1 = \frac{\theta}{1 + \frac{1}{I_b}\left(\left|A_2\right|^2\right)}A_1$$
(2.4-6)

$$\frac{1}{2k}\frac{\partial^2}{\partial x^2}A_2 - i\frac{\partial}{\partial z}A_2 + i\gamma A_2 = \frac{\theta}{1 + \frac{1}{I_b}(|A_2|^2)}A_2$$
(2.4-7)

Osserviamo che l'ipotesi appena introdotta consente, oltre il trascurare, nei denominatori dei secondi membri delle equazioni, l'intensità del fascio "piccolo", anche di "linearizzare" la 2.3-33. Risolvendo numericamente l'equazione 2.4-7 si determina il profilo dell'indice di rifrazione del cristallo che determina il comportamento del campo descritto dalla 2.4-6. Esiste, inoltre, la possibilità di ottenere una espressione *analitica* per l'indice di rifrazione del materiale scegliendo il profilo del campo a z=L e i parametri esterni (V, I_b ecc.), in modo tale da avere, per la 2.4-7, una soluzione solitonica. In quest'ultimo caso, il solitone fissa il profilo *analitico* dell'indice di rifrazione che determina completamente il comportamento del fascio che "parte" da z=0.

Il caso "linearizzato", sebbene interessante dal punto di vista applicativo, in quanto consente di descrivere un dispositivo per il quale un fascio è influenzato solo dall'altro, è più "povero" del caso generale in cui la non linearità e il feedback sono responsabili della formazione di "strutture spaziali" di notevole interesse e complessità. Nel capitolo 4 approfondiremo meglio quest'ultimo aspetto.

2.5 Proprietà formali

Tornando al problema generale (eq.2.3-33, 2.3-34) dimostriamo una notevole proprietà formale inerente la conservazione dell'energia Consideriamo l'intensità totale del campo A_1 , sul piano z:

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} dx A_1 A_1^*$$
 (2.5-1)

Derivando la 2.5-1 rispetto a Z si ha:

$$\frac{dS}{dz} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(A \frac{\partial A^*}{\partial z} + A^* \frac{\partial A}{\partial z} \right)$$
(2.5-2)

Usando l'equazione 2.3-33 :

$$\frac{dS}{dz} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(-\frac{1}{2ik} A_1^* \frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2} + \frac{1}{2ik} A_1 \frac{\partial^2 A_1^*}{\partial x^2} - 2\gamma A_1 A_1^* \right) =$$
(2.5-3)

$$-2\gamma S(z) + \frac{1}{k} \operatorname{Im}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} dx \operatorname{A}_{1} \frac{\partial^{2} A_{1}^{*}}{\partial x^{2}}\right)$$
(2.5-4)

E' facile vedere che l'integrale a secondo membro è una quantità reale. Si ha, per conseguenza:

$$\frac{dS}{dz} = -2\gamma S(z) \tag{2.5-5}$$

che risolta porge:

$$S(z) = S_0 e^{-2\gamma z}$$
(2.5-6)

$$S_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, A_1(x,0) A_1^*(x,0) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx f_1(x) f_1^*(x)$$
(2.5-7)

Una relazione analoga vale, naturalmente, anche per l'altro fascio.

Scala dell'intensità

Siano A_1 e A_2 le soluzioni del sistema di equazioni 2.3-33 e

2.3-34. Sostituendo $A_1 = \frac{\tilde{A}_1}{h}$ e $A_2 = \frac{\tilde{A}_2}{h}$, in cui *h* è un numero

reale arbitrario, si ha:

$$\frac{1}{2k}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\tilde{A}_1 + i\frac{\partial}{\partial z}\tilde{A}_1 + i\gamma\tilde{A}_1 = \frac{\theta}{1 + \frac{1}{h^2I_b}\left(\left|\tilde{A}_1\right|^2 + \left|\tilde{A}_2\right|^2\right)}\tilde{A}_1$$
(2.5-8)

Tesi di laurea di Raimondo Valeri

$$\frac{1}{2k}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\tilde{A}_2 - i\frac{\partial}{\partial z}\tilde{A}_2 + i\gamma\tilde{A}_2 = \frac{\theta}{1 + \frac{1}{h^2 I_b} \left(\left|\tilde{A}_1\right|^2 + \left|\tilde{A}_2\right|^2\right)}\tilde{A}_2$$
(2.5-9)

in cui:

$$\tilde{A}_1(x,0) = h f_1(x)$$
 (2.5-10)

$$\tilde{A}_2(x,L) = h f_2(x)$$
(2.5-11)

\tilde{A}_1 e \tilde{A}_2 sono i campi che si ottengono mandando:

 $f_1(x) \to h f_1(x) \tag{2.5-12}$

$$f_2(x) \to h f_2(x) \tag{2.5-13}$$

$$I_b \to h^2 I_b \tag{2.5-14}$$

La struttura della soluzione della 2.3-33 (2.3-34) dipende

solo dal rapporto
$$\frac{f_1}{\sqrt{I_b}} \left(\frac{f_2}{\sqrt{I_b}}\right)$$
 e non da $f_1(x)$ $(f_2(x))$ e I_b se-

paratamente.

3.1 Algoritmo per l'analisi numerica

Le 2.3-33 e 2.3-34 sono, in generale, equazioni differenziali alle derivate parziali, non lineari e non locali: uno studio numerico è fondamentale, visto che poco si può affermare sulla natura analitica delle soluzioni. La non località rende, inoltre, complicato anche il problema numerico.

Per comprendere questo punto si pensi alla 2.4-3: per calcolare il campo al punto z occorre conoscere il valore dello stesso al punto L-z che il metodo delle differenze finite ancora non possiede. Un qualsiasi metodo che proceda per step successivi, incrementando di volta in volta z, non può essere efficace per risolvere il problema.

Presentiamo qui un algoritmo, basato sulle differenze finite che aggira il problema sopra evidenziato. Definiamo due successioni di funzioni, $A_1^{(n)}(x,z)$ e $A_2^{(n)}(x,z)$ tali che:

$$\begin{cases} \frac{1}{2k} \frac{\partial^2}{\partial x^2} A_1^{(0)} + i \frac{\partial}{\partial z} A_1^{(0)} + i \gamma A_1^{(0)} = 0\\ A_1^{(0)}(x, 0) = f_1(x) \end{cases}$$
(3.1-1)

$$\begin{cases} \frac{1}{2k} \frac{\partial^2}{\partial x^2} A_1^{(n)} + i \frac{\partial}{\partial z} A_1^{(n)} + i \gamma A_1^{(n)} = \frac{\theta}{1 + \frac{1}{I_b} \left(\left| A_1^{(n-1)} \right|^2 + \left| A_2^{(n-1)} \right|^2 \right)} A_1^{(n)} \\ A_1^{(n)}(x, 0) = f_1(x) \end{cases}$$

(3.1-2)

$$\begin{cases} \frac{1}{2k} \frac{\partial^2}{\partial x^2} A_2^{(0)} - i \frac{\partial}{\partial z} A_2^{(0)} + i \gamma A_2^{(0)} = 0\\ A_2^{(0)}(x, L) = f_2(x) \end{cases}$$
(3.1-3)

$$\begin{cases} \frac{1}{2k} \frac{\partial^2}{\partial x^2} A_2^{(n)} - i \frac{\partial}{\partial z} A_2^{(n)} + i\gamma A_2^{(n)} = \frac{\theta}{1 + \frac{1}{I_b} \left(\left| A_1^{(n-1)} \right|^2 + \left| A_2^{(n-1)} \right|^2 \right)} A_2^{(n)} \\ A_2^{(n)}(x,L) = f_2(x) \end{cases}$$

(3.1-4)

Le funzioni, $A_1^{(0)}(x,z)$ e $A_2^{(0)}(x,z)$, rappresentano i campi elettromagnetici liberi che si propagano, rispettivamente, a partire da z=0 con il profilo $f_1(x)$ e da z=L con il profilo $f_2(x)$. Le successioni $A_1^{(n)}(x,z)$ e $A_2^{(n)}(x,z)$ rappresentano, invece, i campi che, partendo rispettivamente da z=0 e da z=L, si propagano in un fondo di indice di rifrazione che dipende da $A_1^{(n-1)}(x,z)$ e da $A_2^{(n-1)}(x,z)$. Per ricorrenza è possibile, quindi, trovare $A_1^{(n)}(x,z)$ e $A_2^{(n)}(x,z)$ una volta note le funzioni $A_1^{(n-1)}(x,z)$ e $A_2^{(n-1)}(x,z)$. Osserviamo che questo è un problema lineare: il 2° membro della prima equazione delle 3.1-2 e 3.1-4 è costituito da una funzione nota moltiplicata per $A_1^{(n)} \left(A_2^{(n)} \right)$.

Le successioni, $A_1^{(n)}$ e $A_2^{(n)}$ sono in grado di risolvere, entro limiti di precisione quantificabili, le equazioni differenziali 2.3-33 e 2.3-34. Supponiamo, infatti, che le successioni $A_1^{(n)}$ e $A_2^{(n)}$ ammettano limite per n tendente a infinito, ovvero che:

$$\lim_{n \to \infty} A_{1}^{(n)}(x, y) = \Psi_{1}(x, z)$$
(3.1-5)

$$\lim_{n \to \infty} A_2^{(n)}(x, y) = \Psi_2(x, z)$$
(3.1-6)

e che la convergenza sia uniforme per entrambe le successioni. Prendendo il limite, per $n \rightarrow \infty$, di ambo i membri delle 3.1-2 e 3.1-4, si ottiene per la prima equazione:

$$\begin{cases} \frac{1}{2k}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi_1 + i\frac{\partial}{\partial z}\Psi_1 + i\gamma\Psi_1 = \frac{\theta}{1 + \frac{1}{I_b}\left(\left|\Psi_1\right|^2 + \left|\Psi_2\right|^2\right)}\Psi_1 \\ \Psi_1(x,0) = f_1(x) \end{cases}$$
(3.1-7)

Mentre per la seconda:

Tesi di laurea di Raimondo Valeri

$$\begin{cases} \frac{1}{2k} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi_2 - i \frac{\partial}{\partial z} \Psi_2 + i \gamma \Psi_2 = \frac{\theta}{1 + \frac{1}{I_b} \left(\left| \Psi_1 \right|^2 + \left| \Psi_2 \right|^2 \right)} \Psi \\ \Psi_2(x, L) = f_2(x) \end{cases}$$
(3.1-8)

I limiti 3.1-5 e 3.1-6, se esistono, sono, pertanto, le soluzioni, rispettivamente della 2.3-33 e della 2.3-34.

L'applicabilità del metodo esposto è, vincolato a due quesiti:

□ Occorre risolvere le 3.1-2 e 3.1-4.

ſ

Occorre un criterio che consenta di interrompere il calcolo delle successioni, A₁⁽ⁿ⁾ e A₂⁽ⁿ⁾, allorché si sia raggiunta una buona convergenza. Per quanto riguarda il primo punto, un metodo efficace di risoluzione, per le 3.1-2 e 3.1-4, è quello delle differenze finite che consiste nel "discretizzare" la regione di integrazione calcolando i campi, sui punti della griglia, attraverso le 3.1-2 e 3.1-4, sostituendo le derivate con i rapporti incrementali.

Sia d la distanza, lungo *x*, illuminata dalla radiazione. In $x=\pm \frac{d}{2}$ richiediamo che i campi siano nulli, supponendo

che la luce non arrivi sul bordo del cristallo. Sostituiamo la striscia

$$\Lambda_{\infty} = \{(x, z) \in (-\infty, +\infty) \cup z \in (0, L)\},\$$

regione in cui occorre trovare le soluzioni delle 2.3-33 e 2.3-34, con il rettangolo:

$$\Lambda_d = \left\{ \left(x, z\right) \in \left(\frac{-d}{2}, \frac{d}{2}\right) \cup z \in \left(0, L\right) \right\}$$

che discretizziamo con una griglia i cui passi, lungo x e lungo z, siano, rispettivamente, δx e δz :

$$\frac{\partial A_1(x,z)}{\partial z} \approx \frac{A_1(x,z+\delta z) - A_1(x,z)}{\delta z}$$
(3.1-9)

$$\frac{\partial^2 A_1(x,z)}{\partial x^2} \approx \frac{A_1(x+\delta x,z) - 2A_1(x,z) + A_1(x-\delta x,z)}{\delta x^2}$$
(3.1-10)

$$\frac{\partial A_2(x,z)}{\partial z} \approx \frac{A_2(x,z+\delta z) - A_2(x,z)}{\delta z}$$
(3.1-11)

$$\frac{\partial^2 A_2(x,z)}{\partial x^2} \approx \frac{A_2(x+\delta x,z) - 2A_2(x,z) + A_2(x-\delta x,z)}{\delta x^2}$$
(3.1-12)

Le 3.1-2 e 3.1-4, riscritte in forma discretizzata, diventano:

$$A_{1}^{(n)}(x,z+\delta z) \approx A_{1}^{(n)}(x,z) - \gamma A_{1}^{(n)}(x,z)\delta z - \frac{i\theta A_{1}^{(n)}(x,z)\delta z}{1 + \frac{\left|A_{1}^{(n-1)}(x,z)\right|^{2} + \left|A_{2}^{(n-1)}(x,z)\right|^{2}}{I_{b}}} + \frac{i\theta A_{1}^{(n)}(x,z)\delta z}{I_{b}}$$

$$\frac{i}{2k}\frac{\delta z}{\delta x^2} \Big[A_1^{(n)}(x+\delta x,z) - 2A_1^{(n)}(x,z) + A_1^{(n)}(x-\delta x,z) \Big]$$
(3.1-13)

Tesi di laurea di Raimondo Valeri

$$A_{2}^{(n)}(x,z+\delta z) \approx A_{2}^{(n)}(x,z) - \gamma A_{2}^{(n)}(x,z) \delta z - \frac{i\theta A_{2}^{(n)}(x,z) \delta z}{1 + \frac{|A_{1}^{(n-1)}(x,z)|^{2} + |A_{2}^{(n-1)}(x,z)|^{2}}{I_{b}}} + \frac{|A_{2}^{(n-1)}(x,z)|^{2}}{I_{b}} + \frac{|A_{2}^{(n-1)}(x,z)|^{2}}$$

$$\frac{i}{2k}\frac{\delta z}{\delta x^2} \Big[A_2^{(n)}(x+\delta x,z) - 2A_2^{(n)}(x,z) + A_2^{(n)}(x-\delta x,z) \Big]$$
(3.1-14)

Le 3.1-13 e 3.1-14 permettono, come si vede facilmente, di trovare le $A_1^{(n)}$ e $A_2^{(n)}$ su tutta la griglia che ricopre Λ_d . La scelta dei passi δx e δz è un problema cruciale delle differenze finite [5]: essi devono essere scelti "piccoli" per garantire che le derivate siano effettivamente discretizzabili ma il senso di tale "piccolezza" non è rigorosamente definibile a priori. Ciò che occorre è che i passi siano molto più piccoli delle scale di variazione spaziale di $A_1^{(n)}$ e di $A_2^{(n)}$. Praticamente si procede come segue: dapprima si fissano due valori per i passi δx e δz , quindi si determinano le $A_1^{(n)}$ e $A_2^{(n)}$. Successivamente si dimezzano i passi e si cercano le nuove $A_1^{(n)}$ e $A_2^{(n)}$. Il confronto tra le prime funzioni con le seconde consente di decidere sulla bontà della scelta dei passi. Tuttavia un punto deve essere precisato: è falso, in generale, ritenere che riducendo i passi si possano ottenere i campi nell'approssimazione desiderata. Si può, in effetti, dimostrare che solo per particolari valori del rapporto $r = \frac{\delta z}{\delta r^2}$ il metodo è effettivamente utilizzabile. Con precisione, la teoria del calcolo numerico prevede che: lo scarto tra le funzioni esatte $A_1^{(n)}$ $(A_2^{(n)})$ e quelle approssimate, ottenute con il metodo delle differenze finite, tende a zero, per δx e δz che vanno a zero, solo se r si mantiene inferiore a un valore critico r_0 , che dipende dal problema in esame. Nel caso libero (quando non è presente l'effetto elettroottico), ad esempio, la teoria prevede che $r_0 = 0.25$. Se i passi non sono scelti in modo corretto le soluzioni ottenute presentano oscillazioni rapidissime, facilmente riconoscibili, che informano sulla cattiva scelta.

Per quanto riguarda il 2° punto occorre introdurre un criterio quantitativo che ci consenta di concludere di quanto le $A_1^{(N)}$ e $A_2^{(N)}$ si discostino dalle soluzioni vere delle equazioni 2.3-33 e 2.3-34. E' chiaro che le $A_1^{(N)}$ e $A_2^{(N)}$ sono una tanto migliore approssimazione delle soluzioni esatte quanto meno esse si discostano rispettivamente dalle $A_1^{(N-1)}$ e $A_2^{(N-1)}$. E' sufficiente osservare, infatti, che se fosse $A_1^{(N)} = A_1^{(N-1)}$ e $A_2^{(N)} = A_2^{(N-1)}$, queste funzioni sarebbero le soluzioni esatte delle equazioni 2.3-33 e 2.3-34.

Operativamente, una volta determinate le $A_1^{(N)}$ e $A_2^{(N)}$, si definiscono le quantità:

50

$$\Phi_1 = \frac{\left|A_1^{(N)} - A_1^{(N-1)}\right|}{\left|A_1^{(N)}\right|} \tag{3.1-15}$$

$$\Phi_2 = \frac{\left|A_2^{(N)} - A_2^{(N-1)}\right|}{\left|A_2^{(N)}\right|} \tag{3.1-16}$$

e, se risulta, uniformemente che

$$\max \Phi_{1} < \varepsilon$$
(3.1-17)

$$(x, z) \in \Lambda_{d}$$

$$\max \Phi_{2} < \varepsilon$$
(3.1-18)

$$(x, z) \in \Lambda_{d}$$

in cui ε è il grado di precisione richiesto, si assumono le $A_1^{(N)}$ e $A_2^{(N)}$ come soluzioni approssimate delle 2.3-33 e 2.3-34. Il numero delle iterazioni (*N*) da effettuare, prima che le 3.1-17 e 3.1-18 siano verificate non è determinabile a priori e il calcolo necessita, in genere, di un tempo piuttosto lungo.

Un test ulteriore, sulla consistenza del metodo usato per trovare le soluzioni delle 2.3-33 e 2.3-34., è fornito dal teorema di conservazione dell'energia.(2.5-6) Definiamo due funzioni

$$w_{1num}(z) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} dx \left| A_1^{(N)}(x,z) \right|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} dx \left| A_1^{(N)}(x,0) \right|^2}$$
(3.1-19)
$$w_{2num}(z) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} dx \left| A_2^{(N)}(x,z) \right|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} dx \left| A_2^{(N)}(x,L) \right|^2}$$
(3.1-20)

e confrontiamo il loro andamento con quello atteso teoricamente che, sulla base della relazione 2.5-6 deve essere:

$$w_{1teor}(z) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} dx |A_1(x, z)|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} dx |f_1(x)|^2} = e^{-2\gamma z}$$
(3.1-21)

$$w_{2teor}(z) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} dx |A_2(x,z)|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} dx |f_2(x)|^2} = e^{-2\gamma z}$$
(3.1-22)

Siano

$$r_1(z) = \frac{w_{1num}(z)}{w_{1teor}(z)}$$
(3.1-23)

$$r_2(z) = \frac{w_{2\,num}(z)}{w_{2\,teor}(z)} \tag{3.1-24}$$

L'andamento di queste funzioni è, di fatto, una ulteriore misura quantitativa del grado di accuratezza delle soluzioni trovate. Vedremo, nel capitolo dedicato alle simulazioni numeriche, che,per N=10, $r_1(z)$ e $r_2(z)$ variano, nella maggior parte dei casi da noi studiati, di qualche parte su 1000.

3.2 Commenti ai programmi utilizzati

In questo lavoro di tesi è stata usata, per lo studio numerico delle soluzioni delle equazioni 2.3-33 e 2.3-34, l'applicazione MATLAB che è particolarmente versatile per quanto concerne lo studio numerico. Per tale studio abbiamo elaborato i quattro programmi che seguono.

D Programma 1: **calcolo** delle $A_1^{(n)}$ e $A_2^{(n)}$

function nulla =fasci(nf,V,mf);

sa=20;

d=220;

L=4000;

dx=1;

dz=0.125;

x = -d/2: dx:0;

lx=length(x);

N=10;

IA=1/100;

c=24;

sb=5;

IB=1;

for jx=1:1x

```
B1(jx) = (sqrt(IA)) * exp(-((x(jx))^2)/(2*(sa^2)));
```

```
B2(jx)=(sqrt(IB))*exp(-((x(jx)-c)^2)/(2*(sb^2)))+
```

```
(sqrt(IB))*exp(-((x(jx)+c)^2)/(2*(sb^2)));
```

end

```
nz=round(L/dz);
```

qz=800;

Dz=qz*dz;

z=0:Dz:L;

lz=length(z);

k = (2*3.141592653)*(2.3/0.457);

omega=0.0005;

Ib=IB/4;

gamma=0.000005;

p1=0;

p2=0;

```
delta=16*lx;
```

GG='wb';

HH='r';

BT1=strcat('forw',num2str(nf),'.bin')

BT2=strcat('back',num2str(nf),'.bin')

fa1=fopen(BT1,'wb');

fa2=fopen(BT2,'wb');

for n=1:N

h=1;

F1(1)=0;

F2(1)=0;

E1=B1;

E2=B2;

if nf==mf

a1=fopen('fileA1x.bin',GG);

a2=fopen('fileB1x.bin',HH);

b1=fopen('fileA2x.bin',GG);

b2=fopen('fileB2x.bin',HH);

else

a1=fopen('fileA1y.bin',GG);

a2=fopen('fileB1y.bin',HH);

b1=fopen('fileA2y.bin',GG);

b2=fopen('fileB2y.bin',HH);

end

```
if GG == 'wb'
```

f1=a1;

f2=a2;

m1=b1;

m2=b2;

else

f2=a1;

m1=b2;

m2=b1;

end

WW1=[real(E1) imag(E1)];

fwrite(f1,WW1,'float64');

WW2=[real(E2) imag(E2)];

fwrite(m1,WW2,'float64');

fwrite(fa1,WW1,'float64');

fwrite(fa2,WW2,'float64');

for jz=1:nz

z1=jz*dz;

z2=(nz-jz)*dz;

if n > 1

bz1=(jz-1)*delta;

fseek(f2,bz1,-1);

a=fread(f2,lx,'float64');

b=fread(f2,lx,'float64');

AA1=a+i*b;

fseek(m2,-(bz1+delta),1);

a=fread(m2,lx,'float64');

b=fread(m2,lx,'float64');

AA2=a+i*b;

bz2=(nz-jz+1)*delta;

fseek(f2,bz2,-1);

a=fread(f2,lx,'float64');

b=fread(f2,lx,'float64');

BB1=a+i*b;

fseek(m2,-(bz2+delta),1);

```
a=fread(m2,lx,'float64');
```

```
b=fread(m2,lx,'float64');
```

BB2=a+i*b;

end

for jx=1:lx-1

if n > 1

 $I1=(abs(AA1(jx+1))^2)+(abs(AA2(jx+1))^2);$

p1=omega*Yinf/(1+I1/Ib);

 $I2=(abs(BB1(jx+1))^2)+(abs(BB2(jx+1))^2);$

p2=omega*Yinf/(1+I2/Ib);

end

if jx == lx-1

D1=2*(E1(jx)-E1(jx+1));

D2=2*(E2(jx)-E2(jx+1));

else

D1 = (E1(jx)-2*E1(jx+1)+E1(jx+2));

$$D2=(E2(jx)-2*E2(jx+1)+E2(jx+2));$$

end

F1(jx+1)=(1-i*dz*p1-gamma*dz)*E1(jx+1)+

 $(i^{*}dz/(2^{*}k^{*}(dx^{2})))^{*}D1;$

F2(jx+1)=(1-i*dz*p2-gamma*dz)*E2(jx+1)+

$$(i^{*}dz/(2^{*}k^{*}(dx^{2})))^{*}D2;$$

end

E1=F1;

E2=F2;

```
WW1=[real(E1) imag(E1)];
fwrite(f1,WW1,'float64');
WW2=[real(E2) imag(E2)];
fwrite(m1,WW2,'float64');
if (z1/Dz) == round(z1/Dz)
h=h+1;
disp(n)
disp(z1)
fwrite(fa1,WW1,'float64');
fwrite(fa2,WW2,'float64');
end
```

enc

end

```
if GG == 'wb'
```

GG='r';

else

GG='wb';

end

if HH == 'wb'

HH='r';

else

HH='wb';

end

fclose(f1);

fclose(m1);

if ne(a2,-1)
fclose(f2);
end
if ne(b2,-1)
fclose(m2);
end
end
fclose(fa1);
fclose(fa1);
fclose(fa2);
OK=strcat('save fasci',num2str(nf),'.mat');
eval(OK)

Questo programma fornisce le $A_1^{(n)}$ e $A_2^{(n)}$ per n=1,2,....10. In questo lavoro di tesi i profili dei campi incidenti a z=0 e a z=L sono simmetrici rispetto all'origine:

$$f_1(x) = f_1(-x)$$
 (3.2-1)

$$f_2(x) = f_2(-x) \tag{3.2-2}$$

Questa simmetria è stata sfruttata per dimezzare il tempo di calcolo, che resta, comunque, lungo(6-12 ore). E' facile provare, infatti, che se le (3.2-1) e (3.2-2) sono verificate, deve essere, per ogni z:

 $A_1(x,z) = A_1(-x,z)$ (3.2-3)

$$A_2(x,z) = A_2(-x,z)$$
(3.2-4),

e, pertanto, le soluzioni delle 2.3-33 e 2.3-34, si possono studiare sul rettangolo $\left\{x \in \left(-\frac{d}{2}, 0\right) z \in (0, L)\right\}$, anziché su tutto

 Λ_d .

D Programma 2 : **disegno** dei grafici $|A_1^{(n)}| \in |A_2^{(n)}|$ in funzione

di x e z.

function nulla=vid1(NO,fla)

NM=num2str(NO);

FW=strcat(':principale:forw',NM,'.bin');

BW=strcat(':principale:back',NM,'.bin');

OK=strcat('load fasci',NM,'.mat');

eval(OK)

fa1=fopen(FW,'r');

fa2=fopen(BW,'r');

xx = -d/2: dx: d/2;

for o=N:N

for jz=1:length(z)

nb=(o-1)*length(z)*delta;

bz1=nb+(jz-1)*delta;

fseek(fa1,bz1,-1);

a=fread(fa1,lx,'float64');

b=fread(fa1,lx,'float64');

q1=a+i*b;

bz2=nb+(length(z)-jz)*delta;

fseek(fa2,bz2,-1);

a=fread(fa2,lx,'float64');

b=fread(fa2,lx,'float64');

q2=a+i*b;

for jx=1:length(x)

AA1(jx,jz)=q1(jx);

AA1(2*length(x)-jx,jz)=q1(jx);

AA2(jx,jz)=q2(jx);

AA2(2*length(x)-jx,jz)=q2(jx);

end

end

figure

if eq(fla,1)

surf(xx,z,abs(AA1)')

shading interp

colormap (pink)

view(180,90)

surf(xx,z,abs(AA2)')

shading interp

colormap (pink)

view(180,90)

else

```
vedi(xx,z,abs(AA1)')
vedi (xx,z,abs(AA2)')
end
```

end

Questo programma visualizza i grafici di $|A_1^{(n)}(x,z)|$ e $|A_2^{(n)}(x,z)|$ in funzione di x e z (in questo lavoro non sono state studiate le fasi delle soluzioni ma solo i moduli).

DProgramma 3: **test** di convergenza e dell'energia

function nulla=test1(NO)

NM=num2str(NO);

FW=strcat(':principale:forw',NM,'.bin');

BW=strcat(':principale:back',NM,'.bin');

OK=strcat('load fasci',NM,'.mat');

eval(OK)

fa1=fopen(FW,'r','b');

fa2=fopen(BW,'r','b');

for o=1:N

for jz=1:length(z)

nb=(o-1)*length(z)*delta;

bz1=nb+(jz-1)*delta;

fseek(fa1,bz1,-1);

a=fread(fa1,lx,'float64');

b=fread(fa1,lx,'float64');

for jx=1:1x

AA1(jx,jz)=a(jx)+i*b(jx);

end

bz2=nb+(length(z)-jz)*delta;

fseek(fa2,bz2,-1);

a=fread(fa2,lx,'float64');

b=fread(fa2,lx,'float64');

for jx=1:lx

AA2(jx,jz)=a(jx)+i*b(jx);

end

end

if ne(0,1)

if o>5

figure

for jz=1:length(z)

for jx=1:length(x)

ua=abs(AA1(jx,jz));

ub=abs(AA2(jx,jz));

DA(jx,jz)=0;

DB(jx,jz)=0;

if not(ua==0)

 $DA(jx,jz) = (abs (AA1(jx,jz)-AQ1(jx,jz))^2)/ua;$

end

if not(ub==0)

```
DB(jx,jz) = (abs (AA2(jx,jz)-AQ2(jx,jz))^2)/ub;
```

end

end

end

ma(o-1)=max(max(DA));

mb(o-1)=max(max(DB));

subplot(2,1,1), mesh(x,z,DA')

view(170,30)

subplot(2,1,2), mesh(x,z,DB')

view(170,30)

end

AQ1=AA1;

AQ2=AA2;

end

end

```
%
```

% Test di convergenza per entrambi i fasci

figure

t=1:N-1;

subplot(2,1,1), semilogy(t,ma,'k*:')

title('max(n)')

subplot(2,1,2), semilogy(t,mb,'k*:')

title('max(n)')

% Test dell'energia per entrambi i fasci

for i=1:length(z)

S1(i)=0;

S2(i)=0;

for j=1:length(x)

 $S1(i)=(S1(i)+abs(AA1(j,i))^{2});$

$$S2(i)=(S2(i)+abs(AA2(j,i))^{2});$$

end

$$R1(i)=S1(i)/exp(-2*0.000005*z(i));$$

R2(i)=S2(i)/exp(-2*0.000005*(L-z(i)));

end

for i=1:length(z)

S10(i) = exp(-2*0.000005*z(i));

$$S20(i) = exp(-2*0.000005*(L-z(i)));$$

end

figure

subplot (2,1,1), plot(z,R1/S1(1))

ylabel('r(z)')

xlabel('z (micron)')

subplot (2,1,2), plot(z,R2/S2(length(z)))

ylabel('r(z)')

```
xlabel('z (micron)')
```

Questo programma calcola le 3.1-15 e 3.1-16 (test di convergenza per le successioni $A_1^{(n)}$ e $A_2^{(n)}$) e considera, per entrambe le successioni, il valore massimo su tutto Λ_d , riportando, in scala semilogaritmica, quest'ultimo valore in funzione della iterata(n) corrispondente; esegue, infine, il test dell'energia (3.1-21 e 3.1-22) e visualizza i grafici di $r_1(z)$ e $r_2(z)$ (3.1-23, 3.1-24).

Programma 4: test sulla divergenza del campo elettrico e sull'importanza relativa del termine diffusivo rispetto a quello di drift.

function nulla=test2(NO)

NM=num2str(NO);

FW=strcat(':principale:forw',NM,'.bin');

BW=strcat(':principale:back',NM,'.bin');

OK=strcat('load fasci',NM,'.mat');

eval(OK)

fa1=fopen(FW,'r','b');

fa2=fopen(BW,'r','b');

o=N;

for jz=1:length(z)

nb=(o-1)*length(z)*delta;

bz1=nb+(jz-1)*delta;

fseek(fa1,bz1,-1);

a=fread(fa1,lx,'float64');

b=fread(fa1,lx,'float64');

F1=a+i*b;

for jx=1:lx;

AA1(jx,jz)=F1(jx);

$$AA1(2*lx-jx,jz)=F1(jx);$$

end

fseek(fa2,bz2,-1);

a=fread(fa2,lx,'float64');

b=fread(fa2,lx,'float64');

F2=a+i*b;

for jx=1:lx;

AA2(jx,jz)=F2(jx);

AA2(2*lx-jx,jz)=F2(jx);

end

end

xx = -d/2: dx: d/2;

for i=1:length(z)

divergenza(length(xx),i)=0;

rapp(length(xx),i)=0;

II(length(xx),i)=0;

for j=1:length(xx)-1

p1=abs(AA1(j+1,i))^2+abs(AA2(j+1,i))^2;

 $p2=abs(AA1(j,i))^2+abs(AA2(j,i))^2;$

Q=(1+((p1+p2)/2)/Ib);

dI=abs((p1-p2)/dx);

II(j,i)=(p1+p2)/2;

deri(j,i)=dI;

divergenza(j,i)=abs((Yinf/Ib)*(dI/(Q^2)));

```
rapp(j,i)=abs(dI/(Yinf*Ib));
end
end
vedi(xx,z,II')
vedi(xx,z,divergenza')
view(175,30)
title('divergenza')
vedi(xx,z,rapp')
title('diff/drift')
min(divergenza)
```

Questo programma calcola il modulo della divergenza del campo elettrico, $|\nabla \cdot \mathbf{Y}(x,z)|$ e esegue il grafico di questa funzione, permettendo il controllo della limitazione 1.2-19. Il programma consente, infine, di controllare la condizione 2.3-25 visualizzando il grafico di $\frac{1}{K_D y_{\infty}} \left| \frac{dQ(x,z)}{dx} \right|$.

Per completezza si sarebbe dovuto includere un test per quantificare la consistenza dell'ipotesi 1.3-1 ovvero quella che, *a priori*, impone che la scala di variazione dell'intensità totale della radiazione che si propaga nel cristallo, sia molto minore della scala di variazione dell'intensità lungo x. Guardando i grafici ci siamo resi conto che un test di questo tipo è inutile in quanto la validità della 1.3-1 appare immediatamente chiara.

4.1 Considerazioni di carattere generale

La scelta dei profili dei campi incidenti a z=0 e a z=L è un problema cruciale. E' chiaro, infatti, che occorre scegliere i "giusti" profili se si vogliono ottenere strutture spaziali "interessanti", ovvero soluzioni sensibilmente differenti rispetto a quelle relative al caso libero (assenza di effetto elettroottico), oppure rispetto a quelle riconducibili a casi già noti. La scelta dei profili dei campi incidenti è caduta sulle gaussiane, facilmente ottenibili, sperimentalmente, con dei fasci laser.

Una prima considerazione importante che può essere fatta *a priori* è che, dovendo studiare gli effetti dell'interazioni di due fasci contropropaganti è necessario che ci sia, naturalmente, una certa sovrapposizione tra i fasci stessi. Intuitivamente è chiaro che se la regione di sovrapposizione fosse poco estesa la corrispondente situazione sperimentale non sarebbe, nella sostanza, dissimile da quella ottenibile considerando, separatamente, due fasci non interagenti.

Non si devono, inoltre, scegliere *per entrambi* i profili incidenti sulle facce z=0 e z=L, delle deviazioni standard "grandi" rispetto alla lunghezza d'onda della radiazione

70

incidente(onde piane), per il fatto che la diffrazione ha un ruolo importante al fine di ottenere strutture spaziali "interessanti". L'ipotesi di onde piani incidenti in z=0 e in z=L comporta, infatti, per quanto riguarda le soluzioni delle 2.3-33 e 2.3-34, che:

$$\begin{cases} A_1 = c_1 \ e^{(i\phi - \gamma)z} \\ A_2 = c_2 \ e^{(i\phi - \gamma)(L - z)} \end{cases}$$
(4.1-1)

in cui $\varphi = -\frac{\theta}{1 + \frac{c_1^2 + c_2^2}{I_b}}$, mentre, c_1 e c_2 , sono le ampiezze

complesse delle onde piane incidenti, rispettivamente, sulle superfici z=0 e z=L. A meno delle perdite, e di un fattore di fase, le soluzioni delle 2.3-33 e 2.3-34, in queste condizioni, riproducono semplicemente quelle dell'ingresso.

I comuni cristalli fotorifrattivi hanno dimensioni lineari che tipicamente variano tra i 500 µm e i 6000 µm. La "piccolezza" della correzione all'indice di rifrazione, dovuta all'effetto elettroottico, $\left(\frac{\delta n}{n} \approx 10^{-3}\right)$, è tale da garanti-

re una evoluzione interessante dei fasci, ovvero sostanzialmente differente dal caso libero, solo se il cristallo è scelto "sufficientemente lungo" (anche se, entro certi limiti, l'effetto elettroottico può essere accentuato, aumentando il potenziale V).

Le considerazioni appena fatte, tuttavia, consentono solo di "escludere" certe condizioni sperimentali, mentre quelle "interessanti" sono, essenzialmente, il risultato di parecchi tentativi. Un tentativo "riuscito" è stato quello di richiedere che i profili dei campi incidenti in z=0 e in z=L, fossero rispettivamente, una gaussiana centrata in x=0 e due gaussiane centrate in due punti simmetrici rispetto all'origine dell'asse x. Abbiamo, in effetti, in questo modo, ottenuto delle soluzioni, per le 2.3-33 e 2.3-34, molto interessanti e completamente "nuove".

Prima di concludere questo paragrafo è bene precisare che, sperimentalmente, i profili gaussiani si realizzano, semplicemente, inviando, sulle superfici di interesse, dei fasci laser, mentre un profilo che rappresenti la sovrapposizione di due gaussiane può essere ottenuto facendo incidere sul cristallo due fasci laser ottenuti, ad esempio, separandone uno in due mediante un *beam splitter*.

72
4.2 Simulazioni numeriche per il caso "simmetrico"

La prima simulazione numerica che riportiamo è relativa al caso in cui in z=0 e in z=L sono presenti due gaussiane identiche (caso simmetrico).

Riportiamo una sola simulazione, con i relativi test, in quanto, in tutte le prove effettuate, variando i parametri e le intensità, non si osservano, se non usando dei valori del potenziale non realistici, delle sensibili differenze. Tenendo presenti le considerazioni fatte nel paragrafo precedente e scegliendo dei parametri facilmente ottenibili sperimentalmente, abbiamo studiato la seguente situazione sperimentale:

$$\lambda = 0.46 \mu m$$
, $n_0 = 2.3$, $r = 10^{-8} \frac{cm}{volt}$

r

$$\begin{cases} f_1(x) = e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \\ f_2(x) = e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \end{cases} \quad \sigma = 20\mu m, \ \frac{V}{l} = 1800 \frac{volt}{cm}, \ I_b = \frac{1}{4}, \ L = 4000\mu m \end{cases}$$

Si noti che non abbiamo affiancato, al valore della intensità di fondo, l'unità di misura corrispondente. La ragione di ciò è legata al fatto che, come visto, la struttura delle soluzioni dipende solo dal rapporto dell'intensità totale rispetto a quella di fondo. La condizione sperimentale riportata sopra è relativa a quella per cui l'intensità (che deve essere scelta in modo da "attivare" l'effetto fotorifrattivo), su ciascun ingresso, è 4 volte più grande di quella di fondo.

Riportiamo, nella pagina successiva, il grafico di $|A_1^{(10)}|$ (che, con ottima approssimazione, è la soluzione del problema simmetrico) e i test relativi.



 $grafico di |A_1|$



confronto "ingresso"-"uscita"









test dell'energia





Commenti ai grafici

Guardando la figura 6 si osserva un forte effetto di" focheggiamento" che tende a "piccare" entrambi i fasci intorno a x=0. Questo effetto è tipico della non linearità ottica che stiamo studiando, in cui proprio la non linearità contrasta, più o meno efficacemente, la diffrazione(i due effetti si bilanciano nel caso in cui i parametri sono scelti in modo da appartenere "alla curva di esistenza" dei solitoni fotorifrattivi). Il caso studiato non dice quindi "cose nuove" rispetto,ad esempio, a quello relativo a un solo fascio incidente su z=0.

Commenti ai test

Per quanto riguarda il test sulla convergenza si nota che, nella 3.1-17, per N=10, $\varepsilon \approx \frac{1}{100}$ e pertanto la $A_1^{(10)}$ è pratica-

mente la soluzione del problema.

Per quanto concerne il test dell'energia la variazione della $r_1(z)$, per $z \in (0,L)$, è di circa una parte su 10. Diciamo subito che per quanto riguarda i test sull'energia relativi alle simulazioni successive, tale variazione è di gran lunga più piccola; tuttavia anche questa è perfettamente accettabile. Notiamo solo che la ragione per cui $r_1(z)$ aumenta al crescere di z è un problema tipico del metodo delle differenze finite. Esso, infatti, consente di trovare i valori dei campi in un punto (x,z) dopo che sono noti quelli calcolati *numericamente in punti precedenti* $(x,z-\delta z)$. E' chiaro, quindi, che al crescere di z, i "piccoli" errori commessi nel "confondere" i rapporti incrementali con le derivate,"sommandosi", possono diventare consistenti.

Per quanto riguarda il test sulla divergenza, osserviamo che esistono delle regioni nel cristallo in cui $|\nabla \cdot \mathbf{Y}|$ è dell'ordine di 2 o 3 parti su 10. Sebbene questo capiti solo in "piccole" zone del cristallo, non c'è modo, a priori, di capire se tale valore è "sufficientemente" minore di 1. Solo la sperimentazione può fornire questa risposta.

Tuttavia è "confortante" il fatto che la sperimentazione sui solitoni fotorifrattivi ha confermato i risultati teorici previsti con il modello che abbiamo presentato nel capitolo 1, con valori di divergenza del campo elettrostatico simili a quelli riportati in figura 10.

L'unico test che in questa simulazione potrebbe non essere "soddisfacente" è quello relativo al confronto tra il termine diffusivo e quello di drift. Dato che quello riportato è il solo caso in cui il termine diffusivo potrebbe avere un certo "peso", non abbiamo ritenuto utile aggiungere, nelle 2.3-33 e 2.3-34, anche il termine diffusivo. Riteniamo, in ogni caso, che la figura 6, riproduca almeno "il grosso" della soluzione. La spiegazione del fatto che, sebbene si usi un potenziale relativamente grande, il termine diffusivo ha ancora un certo "peso", nelle zone in prossimità di z=0 e di z=L, è dovuta al forte effetto di focheggiamento presente in queste regioni. La divergenza del campo è proporzionale, infatti, alla derivata dell'intensità totale, che è tanto più grande quanto più la curva dell'intensità totale stessa è "piccata".

Sebbene il test sulla convergenza indichi chiaramente che la soluzione del problema coincide, con ottima approssimazione, con la $|A_1^{(10)}|$, riteniamo utile riportare i grafici

delle iterate che sono state calcolate.

La prima, in alto a sinistra, in figura 12 a, è la soluzione del caso libero ed è, naturalmente, completamente diversa dalle ultime le quali, invece, sono sempre più "somiglianti": dalla ottava in poi non c'è, praticamente, più differenza.



fig. 12 a: iterate 1,2,3,4



fig.12 b: iterate 5,6,7,8





fig. 12 c: iterate 9,10

4.3 Simulazioni numeriche per il caso "linearizzato"

In tutte le simulazioni che seguiranno abbiamo richiesto che il profilo incidente a z=L sia dato dalla sovrapposizione di due gaussiane. Riportiamo, ora, alcune simulazioni numeriche ottenute scegliendo, per i profili a z=0 e a z=L e per i parametri del cristallo, valori tipici facilmente ottenibili sperimentalmente. E' bene precisare che, sebbene ci siamo messi nella condizione per cui il fascio incidente sulla superficie z=L sia molto più grande di quello incidente sul piano z=0, le simulazioni numeriche sono state fatte usando i programmi numerici validi per il caso generale e pertanto, nei limiti delle approssimazioni che abbiamo precedentemente introdotte, le soluzioni numeriche devono ritenersi "esatte".

Prima serie:

$$\lambda = 0.46 \mu m$$
, $n_0 = 2.3$, $\frac{V}{l} = 1000 \frac{volt}{cm}$, $I_b = \frac{1}{4}$, $r = 10^{-8} \frac{cm}{volt}$

Profilo a z=0
$$f_1(x) = \sqrt{I_1} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}}$$

Tesi di laurea di Raimondo Valeri

in cui
$$I_1 = \frac{1}{100}, \ \sigma_1 = 20 \ \mu m$$

profilo a z=L
$$f_2(x) = \sqrt{I_2} e^{-\frac{(x-c)^2}{2\sigma_2^2}} + \sqrt{I_2} e^{-\frac{(x+c)^2}{2\sigma_2^2}}$$

in cui
$$I_2 = 1, \sigma_2 = 5 \mu m, c = 24 \mu m$$

Riportiamo i grafici dei moduli delle soluzioni delle 2.3-33 e 2.3-34 e quello dell'indice di rifrazione per cristalli fotorifrattivi con le lunghezze L sotto indicate:

grafico fig. 13,14	$L = 4000 \ \mu m$
grafico fig. 15,16	$L = 5000 \ \mu \mathrm{m}$
grafico fig. 17,18	$L = 6000 \ \mu \mathrm{m}$
grafico fig. 19,20	$L = 6000 \ \mu m$

Per quanto riguarda le figure 19...20, avendo scelto, per il campo che, incidendo sulla superficie z=L, si propaga verso le z decrescenti, delle condizioni approssimativamente solitoniche, riportiamo un solo grafico relativo al modulo di quest'ultimo fascio e un solo grafico relativo all'indice di rifrazione del mezzo. Le altre simulazioni sono, infatti, a parte un fattore di scala diverso lungo z, tutte molto simili a quella riportata.



grafico di A_1



fig. 14: confronto "ingresso"-"uscita"





fig. 16: confronto "ingresso"-"uscita"





fig. 18: confronto "ingresso"-"uscita"







fig. 21:

test di convergenza per entrambi i fasci











fig. 24: test sull'importanza relativa diffusione-drift

Commenti ai grafici

Dai grafici 13...20 si vede chiaramente che il fascio con "piccola" intensità tende a "portarsi" nelle regioni spaziali in cui l'indice di rifrazione è più grande. Questo effetto si "amplifica" all'aumentare della lunghezza del cristallo.

Dal grafico 18, che confronta il modulo "dell'ingresso" a z=0 con quello "dell'uscita" a z=L, si vede che i picchi dei due massimi del modulo "all'uscita" sono nettamente definiti : si sono ottenuti, in pratica, due fasci perfettamente coerenti, partendo da un solo fascio incidente sulla superficie z=0. Nel paragrafo successivo daremo un argomento analitico (valido, è bene precisarlo, solo per "piccole" distanze di propagazione) della tendenza del fascio che si propaga verso le z crescenti, a "portarsi" nelle zone in cui l'indice di rifrazione è più grande e anche del fatto che tale tendenza si "amplifica", sempre per "piccole" distanze di propagazione, al crescere di z.

Commenti ai test

Abbiamo riportato solo i test relativi al caso in cui la lunghezza del cristallo è $L = 4000 \,\mu\text{m}$, in quanto, per gli altri casi studiati si ottenevano test molto simili.

Il test sulla convergenza comporta che nella 3.1-17, per

92

N=10, $\varepsilon \approx 10^{-8}$: la "piccolezza" di questo valore indica, in modo inequivocabile, che il metodo numerico da noi sviluppato è in grado di fornire, per una vasta gamma di situazioni sperimentali, delle soluzioni, per le 2.3-33 e 2.3-34 praticamente "esatte". Si noti che pure gli altri test sono sensibilmente "migliorati" rispetto alla simulazione relativa al "caso simmetrico". Per quanto riguarda il test sull'importanza relativa del termine diffusivo rispetto a quello di drift il suo "peso" relativo è minore di una parte su 10 e, pertanto, perfettamente accettabile.

Per quanto concerne il test sulla divergenza, osserviamo che $|\nabla \cdot \mathbf{Y}|$ è, eccetto che in "piccole" regioni del volume del cristallo in cui risulta, comunque, minore di una parte su 10, molto minore dell'unità. Possiamo concludere, pertanto, che le soluzioni ottenute sono consistenti con tutte le ipotesi e le limitazioni imposte dal modello matematico che abbiamo introdotto nei precedenti capitoli.

4.4 Approccio analitico per "piccoli" z

Nel paragrafo precedente, osservando i grafici 13..20, abbiamo evidenziato che *l'intensità della radiazione è più* grande nelle zone spaziali prossime a quelle in cui l'indice di rifrazione è massimo. Abbiamo notato, inoltre, che quest'effetto tende ad amplificarsi al crescere di z mentre, in prossimità "dell'ingresso" (z=0), l'intensità del fascio coincide, sostanzialmente, con quella che si ottiene nel caso libero(assenza di effetto elettroottico). In circostanze alquanto generali, siamo in grado di evidenziare, *in maniera analitic*a, tale effetto almeno per la parte "iniziale"della propagazione del fascio "piccolo".

Una comprensione generale del fenomeno è possibile esclusivamente dal punto di vista numerico, mentre si può sviluppare un approccio analitico maneggevole per la descrizione del fascio per "piccole" distanze di propagazione.

Nel capitolo 2 abbiamo visto che, nell'ipotesi in cui il fascio che "parte" da Z=L abbia un'intensità molto più grande dell'altro, le 2.3-33 e 2.3-34 si semplificano nelle equazioni 2.4-6 e 2.4-7. In questo capitolo richiediamo di essere

94

nelle condizioni di validità delle 2.4-6 e 2.4-7 e di essere, per il campo A_2 , in regime approssimativamente solitonico: $|A_2(x,z)| = |f_2(x)|$. (Osserviamo subito che la dimostrazione che segue è valida anche se non si è nelle condizioni sopra imposte purché nelle regioni "prossime" a z=0 si possa ritenere che l'indice di rifrazione dipende solo da x. A causa della "lenta" variazione dell'intensità lungo z, possiamo ritenere che l'ipotesi che l'indice di rifrazione dipenda solo da x, per "piccoli" z, abbia validità generale). Abbiamo visto (2.4-6) che il comportamento del fascio che si propaga verso le z crescenti, è governato, nell'ipotesi di cui sopra, dall'equazione:

$$\begin{cases} \frac{1}{2k} \frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2} + i \frac{\partial A_1}{\partial z} + i \gamma A_1 = \chi(x) A_1 \\ A_1(x, 0) = f_1(x) \end{cases}$$
(4.4-1)

in cui
$$\chi(x) = \frac{\theta}{1 + \frac{f_2^2(x)}{I_b}}.$$

Ponendo $A_1(x,z) = S(x,z) e^{-\gamma z}$ si ha:

Tesi di laurea di Raimondo Valeri

$$\begin{cases} \frac{1}{2k} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + i \frac{\partial S}{\partial z} = \chi(x)S\\ S(x,0) = f_1(x) \end{cases}$$
(4.4-2)

Richiediamo, per la 4.4-2 la soluzione di prova:

$$S(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n(x) \frac{z^n}{n!}$$
(4.4-3)

Sostituendo nella 4.4-2, dopo qualche passaggio, si riesce a scrivere la relazione seguente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[i\mu_{n+1} - \chi(x) \,\mu_n + \frac{1}{2k} \frac{d^2 \,\mu_n}{dx^2} \right] \frac{z^n}{n!} = 0 \tag{4.4-4}$$

Questa uguaglianza deve essere vera qualunque sia z e, pertanto, la relazione di ricorrenza che segue consente di risolvere, in linea di principio,l'equazione differenziale 4.4-2.

$$\begin{cases} i\mu_{n+1} = \chi(x) \mu_n - \frac{1}{2k} \frac{d^2 \mu_n}{dx^2} \\ \mu_0 = f_1(x) \end{cases}$$
(4.4-5)

Scriviamo, ora, l'espressione per l'intensità del fascio:

$$|A_1|^2 = e^{-2\gamma z} |S|^2$$
(4.4-6)

in cui

$$|S|^{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_{n} \frac{z^{n}}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \mu_{m}^{*} \frac{z^{m}}{m!}$$
(4.4-7)

Osserviamo che le $\mu_n(x)$ sono funzioni **reali** per **n pari** e **puramente immaginarie** per **n dispari**. Per dimostrare quanto affermato è sufficiente osservare, nelle relazioni di ricorrenza, che se per un certo n, $\mu_n(x)$ è reale, allora $\mu_{n+1}(x)$ è puramente immaginario mentre, se $\mu_n(x)$ è puramente immaginario, $\mu_{n+1}(x)$ è reale. Da questa osservazione segue la dimostrazione:

$$f_1(x) = \mu_0(x) = r \longrightarrow \mu_1(x) = i \longrightarrow \mu_2(x) = r...$$

(*r*=reale, *i*=puramente immaginario)

Quest'ultima considerazione ci consente di concludere che, nella 4.4-7, i termini che nella sommatoria non si elidono, sono quelli per cui n+m=numero pari. Notiamo, infatti, che $\mu_n \mu_m^*$ è reale se n=pari e m=pari oppure se n=dispari e m=dispari, mentre è immaginario puro se n=dispari e m=pari oppure se n=pari e m=dispari. Si ha, pertanto:

97

Tesi di laurea di Raimondo Valeri

$$|S|^{2} = \sum_{n+m=pari} \sum_{n+m=pari} \mu_{n} \ \mu_{m}^{*} \ \frac{z^{n+m}}{n! \ m!} + i \sum_{n+m=dispari} \sum_{n+m=dispari} h(x) \ \frac{z^{n+m}}{n! \ m!}$$
(4.4-8)

in cui $h(x) = \pm \left| \mu_n \ \mu_m^* \right|.$

In ogni caso:

$$|S|^{2} = \sum_{n+m=pari} \sum_{n+m=pari} \mu_{n} \ \mu_{m}^{*} \ \frac{z^{n+m}}{n!m!}$$
(4.4-9)

Quest'ultima relazione poteva essere trovata direttamente osservando che l'intensità della radiazione non può contenere dei termini per cui l'esponente di z è dispari per il fatto che l'energia del fascio non può dipendere dal verso di propagazione del fascio stesso. La soluzione 4.4-9 per l'intensità è valida su tutto il volume del cristallo ma risulta di scarsa praticità analitica, visto che al crescere di z il numero dei termini "necessario" per riprodurre i risultati ottenuti numericamente risulta proibitivo.Tuttavia per "piccole" distanze di propagazione è sufficiente arrestare la serie al primo termine .Quest'ultima operazione consente di ottenere una espressione analitica per la correzione all'intensità libera. La distanza di propagazione, per cui troncare la serie di Taylor al primo termine è un'operazione lecita, soddisfa alla condizione per cui la correzione al caso libero (dipendente da z) è molto minore dell'intensità che si ottiene nel caso in cui l'effetto elettroottico non è presente. Dalla 4.4-9 è possibile ricavare l'espressione per la correzione all'intensità:

$$\left|S\right|^{2} \approx f_{1}^{2}(x) + z^{2}(\mu_{2} f_{1} + \mu_{1} \mu_{1}^{*})$$
(4.4-10)

in cui

$$i \mu_{1} = \chi f_{1} - \frac{1}{2k} \frac{d^{2} f_{1}}{dx^{2}} =$$

$$\mu_{2} = -\chi \left[\chi f_{1} - \frac{1}{2k} \frac{d^{2} f_{1}}{dx^{2}} \right] + \frac{1}{2k} \frac{d^{2}}{dx^{2}} \left[\chi f_{1} - \frac{1}{2k} \frac{d^{2} f_{1}}{dx^{2}} \right]$$

Ponendo
$$m(x) = \chi f_1 - \frac{1}{2k} \frac{d^2 f_1}{dx^2}$$
 la 4.4-10 diventa:

$$\left|S\right|^{2} \approx f_{1}^{2}(x) + z^{2} \left[\frac{1}{2k} \frac{d^{2}m}{dx^{2}} f_{1} - \chi m f_{1} + m^{2}\right]$$
(4.4-11)

Osserviamo dai grafici sotto riportati (fig.25,26) che $|\chi f_1| \gg \frac{1}{2k} \frac{d^2 f_1}{dx^2}$. Questi grafici sono ottenuti usando i para-

metri della prima serie di simulazioni numeriche.

L'osservazione precedente comporta che $\chi f_1 \approx m(x)$, ovvero:

Tesi di laurea di Raimondo Valeri

$$\left|S\right|^{2} \approx f_{1}^{2} + z^{2} \frac{1}{2k} \frac{d^{2}m}{dx^{2}} f_{1}$$
(4.4-12)

Osserviamo che, senza usare l'approssimazione 4.4-12, si ha

$$\frac{d^2 m}{dx^2} = \frac{d^2 \chi}{dx^2} f_1 + 2\frac{d\chi}{dx}\frac{df_1}{dx} + \chi \frac{d^2 f_1}{dx^2} - \frac{1}{2k}\frac{d^4 f_1}{dx^4}$$
(4.4-13)

mentre, usando l'approssimazione, si ottiene

$$\frac{d^2 m}{dx^2} \approx \frac{d^2 \chi}{dx^2} f_1 + 2\frac{d\chi}{dx}\frac{df_1}{dx} + \chi \frac{d^2 f_1}{dx^2}$$
(4.4-14)

Il termine trascurato contiene la derivata quarta del profilo a z=0.

Osservando, infine, i grafici relativi alle figure 27 e 28 ci

si convince che il termine dominante, nella 4.4-14, è $\frac{d^2 \chi}{dx^2} f_1$

e, pertanto, si ha:

$$\left|S\right|^{2} \approx f_{1}^{2} + \frac{d^{2} \chi}{dx^{2}} \frac{f_{1}^{2}}{2k} z^{2}$$
(4.4-15)

Trascurando le perdite, il primo termine correttivo, ri-

spetto al caso libero, all'intensità è, per conseguenza, proporzionale alla derivata seconda di χ che risulta positiva dove tale funzione è minima, ovvero dove l'indice di rifrazione è massimo; mentre, la "correzione" all'energia si "amplifica" all'aumentare di z.



figura 25:

confronto tra
$$\frac{1}{2k} \frac{d^2 f_1}{dx^2}$$
 e χf_1



figura 26:

confronto tra m(x) e χf_i



fig. 27: confronto tra $\frac{d^2\chi}{dx^2}f_1$, $2\frac{d\chi}{dx}\frac{df_1}{dx}$ e $\chi \frac{d^2f_1}{dx^2}$





4.5 Ulteriori esempi

per il caso "linearizzato"

Riportiamo, ora, altre simulazioni relative al caso "linearizzato" che evidenziano un comportamento più complesso rispetto alle simulazioni precedenti per lo stesso caso.

Seconda serie:

$$\lambda = 0.46 \mu m$$
, $n_0 = 2.3$, $\frac{V}{l} = 1800 \frac{volt}{cm}$, $I_b = \frac{1}{4}$, $r = 10^{-8} \frac{cm}{volt}$

Profilo a z=0
$$f_1(x) = \sqrt{I_1} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}}$$

in cui
$$I_1 = \frac{1}{100}, \, \sigma_1 = 30 \, \mu m$$

profilo a z=L
$$f_2(x) = \sqrt{I_2} e^{-\frac{(x-c)^2}{2\sigma_2^2}} + \sqrt{I_2} e^{-\frac{(x+c)^2}{2\sigma_2^2}}$$

in cui
$$I_2 = 1, \sigma_2 = 5 \,\mu m, c = 24 \,\mu m$$

Osserviamo subito che, rispetto al caso precedente, l'effetto elettroottico è più efficace e, basandoci sull'argomento analitico che abbiamo introdotto nel capitolo precedente, possiamo prevedere, *per piccole distanze di propagazione*, una maggiore concentrazione di energia, rispetto al caso precedente, nelle zone in cui l'indice di rifrazione è più grande. Quanto detto è ciò che realmente si osserva anche se i grafici mostrano un comportamento, per cristalli con lunghezza opportuna, molto diverso da quelli della prima serie.

Riportiamo, per quanto riguarda il fascio con "piccola" intensità, due soli grafici relativi alle lunghezze dei cristalli sotto indicate. Sebbene siano state fatte molte altre prove, con lunghezze del cristallo comprese tra $L=1500 \,\mu\text{m}$ e $L=6000 \,\mu\text{m}$ e con gli altri parametri fissati ai valori sopra evidenziati, riteniamo superfluo riportare questi grafici in quanto essi possono essere ottenuti tutti dalla figura 30, **come conseguenza della "linearizzazione"** delle equazioni 2.3-33 e 2.3-34 e del fatto che si è scelta, per il fascio di "grande" intensità, una condizione sperimentale quasi solitonica: questo comporta che le soluzioni delle 2.3-33 e 2.3-34, in un punto arbitrario nel volume del cristallo, trascurando le perdite, *non possono dipendere dalla lunghezza del cristallo stesso*.

Riportiamo, infine, un grafico del fascio con "grande" intensità e uno relativo all'indice di rifrazione del mezzo per $L = 6000 \,\mu\text{m}$.

Non riportiamo invece i test, relativi a queste simulazio-

105

ni, in quanto essi non differiscono, nella sostanza, da quelli della prima serie del "caso linearizzato".

grafico fig. 29	$L = 1500 \ \mu m$
grafico fig. 30	$L = 6000 \ \mu \text{m}$
grafico fig. 31,32	$L = 6000 \ \mu m$



fig. 29: grafico di $|A_1|$ per un cristallo con $L = 1500 \mu m$







indice di rifrazione per un cristallo con L=6000µm
Commenti ai grafici

La figura 29 evidenzia, per il fascio di "piccola" intensità, un comportamento non dissimile da quello che può essere dedotto osservando i grafici relativi alla prima serie di simulazioni numeriche del "caso linearizzato", anche se la tendenza della radiazione a concentrarsi nelle regioni in cui l'indice di rifrazione è più grande, è più marcata rispetto all'altro caso, per il quale occorrono, per dar modo a questa tendenza di "amplificarsi", dei cristalli più "lunghi". Come già accennato, l'argomento analitico sviluppato nel precedente paragrafo, anche se solo per "piccole" distanze di propagazione, è in grado di "spiegare" anche il grafico della figura 29.

Dal grafico della figura 30 si osserva, invece, un comportamento più complesso: la tendenza della radiazione a concentrare la propria energia in prossimità delle regioni in cui l'indice di rifrazione è massimo diventa meno "forte" quando z è approssimativamente compreso tra 2500 e 4000 micron, mentre, su distanze più lunghe,si osserva un comportamento quasi periodico. Qualitativamente possiamo "spiegare" quanto appena detto osservando che la diffrazione, tendente a "sparpagliare" il fascio, opera più efficacemente nelle regioni in cui l'intensità possiede dei picchi ($z \approx 2000, 2500 \ \mu$ m). D'altra parte, per valori di z più grandi, a causa dell'allargamento dif-

109

frattivo precedente, la diffrazione stessa risulta meno efficace e torna a prevalere la tendenza della luce a confinarsi nei "binari" dell'indice di rifrazione.

4.6 Simulazioni numeriche per il "caso generale"

Per "caso generale" intendiamo una situazione sperimentale per cui le intensità dei campi contropropaganti siano confrontabili e la forma funzionale dei profili sui due "ingressi" sia, compatibilmente con la realtà fisica, arbitraria. Questo caso è molto più complesso a causa della non linearità e della retroazione. Tuttavia anche nel caso generale si manifesta, insieme ad altri effetti, la tendenza della radiazione a concentrarsi nelle zone prossime a quelle in cui l'indice di rifrazione è più grande. A causa del fatto che, anche per il caso generale, si può ritenere che, per piccole distanze di propagazione della radiazione, l'indice di rifrazione dipende "poco" da z, l'argomento sviluppato nel paragrafo 4.4 è la dimostrazione analitica, almeno per quanto concerne le fasi "iniziali" della propagazione, che nelle equazioni 2.3-33 e 2.3-34 è contenuta questa tendenza.

Mentre nel "caso linearizzato" l'indice di rifrazione del mezzo è fissato dal fascio con "grande" intensità (e, in certe condizioni, ha addirittura una forma funzionale semplice, *determinabile a priori*) ed è possibile, quindi, limitarsi a studiare solo la propagazione del fascio con "piccola" intensità, nel "caso generale" l'indice di rifrazione è invece determinato da entrambi i fasci (e dalla loro interazione) e può essere calcolato solo dopo aver risolto entrambe le equazioni 2.3-33 e 2.3-34.

Riportiamo le seguenti simulazioni:

 $\lambda = 0.46 \mu m$, $n_0 = 2.3$, $L = 4000 \mu m$, $I_b = \frac{1}{4}$, $r = 10^{-8} \frac{cm}{volt}$

Profilo a z=0
$$f_1(x) = \sqrt{I_1} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}}$$

in cui
$$I_1 = 1, \sigma_1 = 20 \mu m$$

profilo a z=L
$$f_2(x) = \sqrt{I_2} e^{-\frac{(x-c)^2}{2\sigma_2^2}} + \sqrt{I_2} e^{-\frac{(x+c)^2}{2\sigma_2^2}}$$

in cui
$$I_2 = 1, \sigma_2 = 10 \,\mu m, c = 25 \,\mu m$$

e i grafici, di entrambi i fasci, con i valori del potenziale esterno sotto indicati:

- grafici fig. 33, 34, 35: $\frac{V}{l} = 2100 \frac{volt}{cm}$
- grafico fig. 36, 37, 38 $\frac{V}{l} = 2400 \frac{volt}{cm}$
- grafico fig. 39, 40, 41 $\frac{V}{l} = 2700 \frac{volt}{cm}$

Non riportiamo invece i test, relativi a queste simulazioni, in quanto essi sono molto simili a quelli relativi al "caso linearizzato".













fig. 40: confronto tra $f_1(x)$ e







fig. 42: grafico di $|A_1|$ vista dall'alto

Commenti ai grafici

Le simulazioni presentate in questo paragrafo mostrano, analogamente al "caso linearizzato", la possibilità di ottenere, in pratica, due fasci *perfettamente coerenti*, partendo da *un solo fascio* incidente sulla superficie z=0.

Si osservi, in particolare, la figura 37 da cui è possibile notare che il rapporto tra il valore del picco del modulo del campo $A_1(x,L)$ e il minimo di questo stesso modulo, in x=0, è maggiore di 10. Altre prove, ottenute con valori più piccoli del potenziale (che non riportiamo), combinate con le simulazioni presentate in questo paragrafo (fig. 33,34,36,37,39,40), evidenziano che questo rapporto aumenta gradualmente fino a raggiungere un massimo per $\frac{V}{l} = 2400 \frac{volt}{cm}$. Incrementando ulteriormente il valore del

potenziale, tuttavia, questo rapporto diminuisce, favorendo la formazione di "massimi secondari", sottraendo energia dai "picchi principali" (fig.39,40). Al fine di evidenziare meglio il comportamento del campo A_1 riportiamo, in figura 42, un grafico "visto dall'alto", relativo alla simulazione con $\frac{V}{l} = 2700 \frac{volt}{cm}$ (per le altre due simulazioni

i grafici "visti dall'alto" sono qualitativamente simili a questo e non li riportiamo).

Questo grafico mette in risalto che il campo A_1 , propagandosi da z=0 verso z=L, gradualmente si "sposta" in prossimità delle regioni illuminate dall'altro fascio. *Per "piccole" distanze di propagazione*, potendo ritenere che l'indice di rifrazione dipenda solo da x, l'argomento analitico sviluppato per il "caso linearizzato" giustifica questa tendenza.

Per quanto concerne i grafici delle figure 35,38,41 si vede che anche il campo A_2 "tende" a concentrare la sua energia nelle regioni illuminate dall'altro fascio.

Bibliografia

- [1] N.V. Kukhtarev, V.B. Markov, S.G. Odulov, M.S. Soskin e V.L. Vinetski, *Ferroelectrics* 22,961
- [2] N.W.Ashcroft, N.D.Mermin, Solid State Physics, Philadelphia
- [3] P.Yeh, Introduction to Photorefractive Nonlinear Optics, Wiley, New York
- [4] E.Del RE, A.Ciattoni, B.Crosignani and M.Tamburrini,J. Opt.Soc.Am.B15, 1469
- [5] N.S.Piskunov, *Calcolo differenziale e integrale II*, Vol.2, Editori Riuniti, Edizioni Mir
- [6] P. Gunter and J.P. Huignard, eds, Photorefractive ma terials and Their Applications I (Springer Verlag, Ber lin,); Photorefractive Materials and Their Appli cations II (Springer-Verlag, Berlin,).
- [7] L.Solymar, D.J.Webb, and A.Grunnet-Jepsen, The Phy sics and Applications of Photerefractive Materials (Clarendon, Oxford, UK)
- [8] M.Segev, C.Valley, B.Crosignani, P.Di Porto, and A.Ya riv, Phys Rev. Lett. 73, 3211.
- [9] M.Segev, M.Shih and G.Valley, J.Opt Soc. Am B13, 706
- [10] B.Crosignani, P.Di Porto, A.Degasperis, M.Segev, and

S. Trillo, J.Opt Soc Am B14, 3078-3090

- [11] B.Crosignani, P.Di Porto, M.Segev, G.Salamo and A.Yariv, La Rivista del Nuovo Cimento 21-6
- [12] A.Yariv and P.Yeh, in Optical Waves in Crystals Wiley, New York,
- [13] A.Yariv, in Optical Electronics, 4th Edition (Oxford Press, New York,).