Unità 2

Funzioni

1. Introduzione alle funzioni

Che cos'è una funzione?

In questa Unità riprendiamo e approfondiamo un tema fondamentale già introdotto nel primo biennio e che ci accompagnerà in tutto il nostro corso: quello delle funzioni. Per poter definire il concetto di funzione dobbiamo anzitutto definire quello di *relazione*.

RELAZIONE
Una **relazione** è una legge che permette di associare ad alcuni (o a tutti) gli elementi di un insieme di partenza A uno o più elementi di un insieme di arrivo B.

ESEMPI

a. Nella fig. 2.1 abbiamo rappresentato tramite un diagramma a frecce la relazione che associa a ogni città dell'insieme A la regione dell'insieme B cui tale città appartiene.

b. Nella fig. 2.2 abbiamo rappresentato tramite un diagramma a frecce la relazione che associa a ogni regione dell'insieme A le città dell'insieme B che appartengono a tale regione.

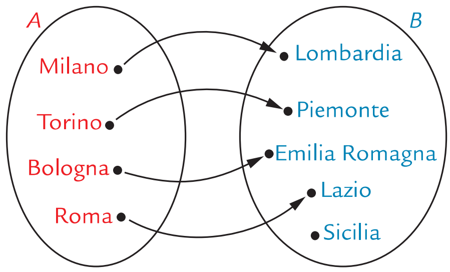


Figura 2.1

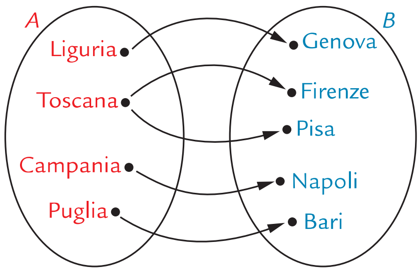


Figura 2.2

La relazione rappresentata in fig. 2.1 ha una particolare caratteristica, che **non** possiede la relazione in fig. 2.2: da **ogni** elemento di A parte **una e una sola** freccia verso qualche elemento di B. Ciò significa che ogni elemento di A è in relazione con un unico elemento di B. Le relazioni che hanno questa proprietà si dicono *funzioni*.

Modi di dire
Poiché una funzione fa corrispondere a ogni elemento di A uno e un solo elemento di B, viene detta anche **corrispondenza univoca.** Un altro sinonimo di funzione è **applicazione.**

FUNZIONE
Siano A e B due insiemi non vuoti; si dice **funzione** da A a B una **relazione** che associa a **ogni** elemento di A **uno e un solo** elemento di B.

L'insieme di partenza A si chiama **dominio** della funzione, l'insieme di arrivo B si chiama **codominio**.

Esempio	Controesempio
In un insieme di persone, la relazione che associa a ciascuna di esse la sua età definisce una funzione. Infatti a ogni persona resta associata un'unica età.	In un insieme di persone, la relazione che associa a ciascuna di esse i suoi figli, in generale, non definisce una funzione. Infatti qualcuno potrebbe non avere figli o averne più di uno.

Le funzioni vengono indicate con lettere dell'alfabeto, generalmente minuscole, come f, g, ... Per indicare che f è una funzione di dominio A e di codominio B si scrive:

$f : A \to B$ che si legge: «f è una funzione da A a B»

Quando è data una funzione f, l'**immagine** di un elemento x appartenente al dominio della funzione, cioè l'elemento nel codominio che tramite f corrisponde a x, viene indicata con il simbolo:

$f(x)$ che si legge «f di x»

Se l'elemento y è l'immagine di x tramite una certa funzione f, si può anche dire, simmetricamente, che x è la **controimmagine** di y.
In particolare, l'insieme costituito dalle immagini di tutti gli elementi del dominio A è chiamato (insieme) **immagine** della funzione, e lo si indica con $f(A)$.

Altre notazioni
L'insieme immagine di una funzione f viene talvolta indicato con il simbolo $\mathrm{Im}(f)$.

Funzioni reali di variabile reale e loro classificazione

Fra i vari tipi di funzioni, giocano un ruolo di primo piano le funzioni che hanno come dominio e codominio sottoinsiemi dell'insieme $\mathbf{R}$ dei numeri reali: queste funzioni sono chiamate **funzioni reali di variabile reale** e saranno l'oggetto principale del nostro corso.
La legge che definisce una funzione f, reale di variabile reale, viene solitamente assegnata mediante un'equazione del tipo:

$$y = f(x)$$

dove $f(x)$ è un'espressione nella variabile x, detta **espressione analitica** della funzione, oppure mediante una scrittura del tipo:

$$f(x) = \ldots\ldots$$

dove al posto dei puntini vi è appunto l'espressione analitica della funzione.

ESEMPI

a. La funzione f, da $\mathbf{R}$ a $\mathbf{R}_0^+$, che associa a ogni numero reale il suo quadrato, può venire assegnata, in modo equivalente, in una delle seguenti due forme:

$y = x^2$ oppure $f(x) = x^2$

b. La funzione f, da $\mathbf{R}$ a $\mathbf{R}$, che associa a ogni numero reale il numero stesso, detta funzione **identità**, può venire assegnata, in modo equivalente, in una delle seguenti due forme:

$y = x$ oppure $f(x) = x$

Se la funzione è assegnata tramite l'equazione:

$$y = f(x)$$

si dice che x è la **variabile indipendente**, perché a essa può venire assegnato un valore arbitrariamente scelto nel dominio, mentre y è la **variabile dipendente**, perché il valore assunto da y *dipende* da quello assegnato alla x.

ESEMPIO **Valori assunti da una funzione**

Data la funzione f definita da $y = 3x^2 - 2x$, determiniamo i valori assunti da y quando:

a. $x = 4$ **b.** $x = -2$

➔

a. Il valore assunto da y quando $x = 4$ si può determinare sostituendo 4 al posto di x nell'equazione che definisce f:

$$y = 3 \cdot 4^2 - 2 \cdot 4 = 3 \cdot 16 - 8 = 40$$

b. Analogamente, il valore assunto da y quando $x = -2$ è:

$$y = 3 \cdot (-2)^2 - 2 \cdot (-2) = 3 \cdot 4 + 4 = 16$$

Si può anche scrivere: $f(4) = 40$ e $f(-2) = 16$.

Attenzione!

Non è detto che l'espressione analitica di una funzione numerica possa sempre venire espressa tramite una sola espressione algebrica. Per esempio, una funzione potrebbe essere definita da:

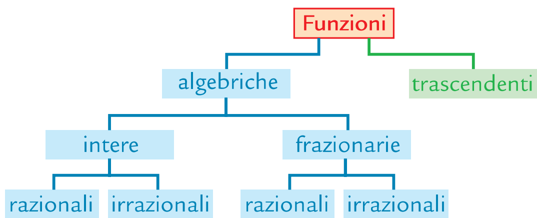
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ x^3 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Non è nemmeno detto che la legge che definisce una funzione numerica possa sempre venire espressa tramite una «formula». Per esempio, la funzione $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ che associa a ogni $x \in \mathbf{N}$ il numero dei numeri primi minori di x è ben definita, ma non esiste «formula» in grado di esprimere la legge che la definisce.

In base all'espressione analitica di una funzione, si può effettuare una prima semplice *classificazione* delle funzioni reali di variabile reale.
Se nell'espressione analitica della funzione la variabile indipendente (tipicamente x) è soggetta soltanto a un numero finito di operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione, elevamento a potenza a esponente razionale o estrazione di radice si dice che la funzione è **algebrica**, altrimenti si dice che è **trascendente**.

Esempio	Controesempio
Sono funzioni algebriche:	**Non** sono funzioni algebriche:
a. $y = x^4$	**a.** $y = 3^{x+1}$
b. $y = \sqrt[3]{x^2 + 1}$	**b.** $y = x \cdot 6^x$
c. $y = \dfrac{1}{x + x^2}$	**c.** $y = \dfrac{1}{2} x^x$

Nell'insieme delle funzioni *algebriche* si distinguono: le funzioni **intere** (o **polinomiali**), nelle quali la variabile indipendente non compare in alcun denominatore, da quelle **frazionarie** (o **fratte**); le funzioni **razionali**, nelle quali la variabile indipendente non compare sotto alcun segno di radice, da quelle **irrazionali**.



ESEMPI Classificazione di una funzione algebrica

a. La funzione $y = x^4 - x^2$ è intera razionale.

b. La funzione $y = \dfrac{1}{x^4 - x^2}$ è frazionaria razionale.

c. La funzione $y = \sqrt{x^2 + 3x}$ è intera irrazionale.

d. La funzione $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x + 1}}$ è frazionaria irrazionale.

Il dominio di una funzione reale di variabile reale

Una funzione reale di variabile reale, chiamiamola f, viene di solito assegnata tramite la sua espressione analitica, senza specificarne il dominio e il codominio (come abbiamo fatto negli esempi precedenti, dopo i primi).

In tal caso si assume per convenzione:

- come *dominio*, l'insieme costituito da tutti i numeri reali x per cui esiste il corrispondente valore $f(x)$ (tale insieme viene anche detto dominio **naturale** della funzione);
- come *codominio*, l'insieme **R**.

Quando x appartiene (non appartiene) al dominio della funzione diremo anche che f è **definita** (non definita) in x.
Per determinare il dominio di una funzione *algebrica* occorre imporre che:

- gli eventuali *denominatori* che compaiono nella sua espressione analitica siano *diversi da zero*;
- i *radicandi* degli eventuali radicali di indice *pari* che compaiono nella sua espressione analitica siano *maggiori o uguali a zero*.

Modi di dire

Il dominio di una funzione di variabile reale, definita dalla formula $y = f(x)$, è detto anche **insieme di definizione** o, se stabilito come indicato qui a lato, **campo di esistenza**.

ESEMPI Dominio di una funzione algebrica

Determiniamo il dominio delle seguenti funzioni:

a. $y = x^4 - x^2$ **b.** $y = \dfrac{1}{x^4 - x^2}$ **c.** $y = \sqrt{x^2 + 3x}$

d. $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x+1}}$ **e.** $y = \sqrt{x} + \sqrt{5-x}$ **f.** $y = \dfrac{\sqrt{x-2}}{x^2 + x + 1}$

a. La funzione è definita per ogni valore reale di x, quindi il dominio è **R**.

b. La funzione è definita purché il denominatore sia diverso da zero:

$$x^4 - x^2 \neq 0 \;\Rightarrow\; x^2(x^2-1) \neq 0 \Rightarrow x \neq 0 \wedge x \neq \pm 1$$

Il dominio della funzione è l'insieme $\mathbf{R} - \{0, \pm 1\}$.

c. La funzione è definita purché il radicando del radicale sia maggiore o uguale a zero:

$$x^2 + 3x \geq 0 \Rightarrow x \leq -3 \vee x \geq 0$$

Il dominio della funzione è l'insieme $(-\infty, -3] \cup [0, +\infty)$.

d. Poiché un radicale di indice dispari è sempre definito, l'unica condizione da porre è che il denominatore sia diverso da zero:

$$\sqrt[3]{x+1} \neq 0 \Rightarrow x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$$

Il dominio della funzione è l'insieme $\mathbf{R} - \{-1\}$.

e. La funzione è definita purché i radicandi di *entrambi* i radicali siano maggiori o uguali a zero:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 5 - x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq x \leq 5$$

Il dominio della funzione è l'intervallo $[0, 5]$.

f. La funzione è definita purché il radicando sia maggiore o uguale a zero e il denominatore sia diverso da zero:

$$\begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ x^2 + x + 1 \neq 0 \end{cases}$$

Osserviamo che la seconda condizione è sempre verificata (perché il discriminante del trinomio $x^2 + x + 1$ è negativo, quindi il trinomio non si annulla mai). Pertanto il sistema è verificato per $x \geq 2$. Il dominio della funzione è dunque l'intervallo $[2, +\infty)$.

Quando una funzione esprime una grandezza in funzione di un'altra, può essere necessario «restringere» il suo dominio naturale, in base a particolari condizioni fisiche o geometriche, legate al contesto da cui scaturisce la funzione.

ESEMPIO **Dominio di una funzione proveniente da un problema geometrico**

Un rettangolo non degenere è inscritto in una circonferenza di raggio 1. Esprimiamo l'area del rettangolo in funzione della misura $2x$ della base del rettangolo e determiniamo il dominio della funzione così scaturita, in relazione al problema geometrico.

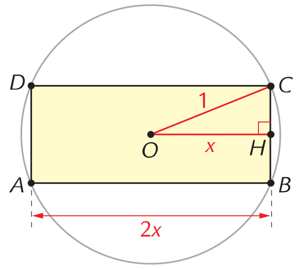


Figura 2.3

- **Espressione analitica della funzione che esprime l'area in funzione di x**

Facciamo riferimento alla **fig. 2.3** che rappresenta il problema. Applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo OHC, dove H è il punto medio di BC, si può ricavare:

$$\overline{CH} = \sqrt{1 - x^2}$$

Ne segue che $\overline{BC} = 2\overline{CH} = 2\sqrt{1 - x^2}$.
Perciò, detta $A(x)$ l'area del rettangolo, si ha:

$$A(x) = \overline{AB} \cdot \overline{BC} = (2x)(2\sqrt{1 - x^2}) = 4x\sqrt{1 - x^2}$$

- **Dominio della funzione**

Determinare il dominio della funzione $A(x)$ scaturita, in relazione al problema geometrico, significa determinare quali valori può assumere la variabile x, relativamente al problema. Osserviamo intanto che x potrà variare tra 0 e 1 perché la misura $2x$ della base AB può variare tra 0 e 2. Il valore $x = 0$ corrisponde al caso limite in cui $A \equiv B$ e $C \equiv D$ (**fig. 2.4**), mentre il valore $x = 1$ corrisponde al caso limite in cui $A \equiv D$ e $B \equiv C$ (**fig. 2.5**).

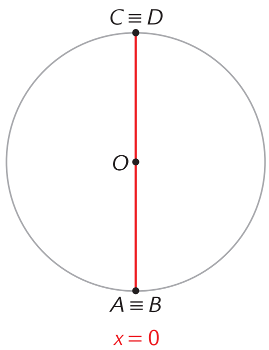


Figura 2.4

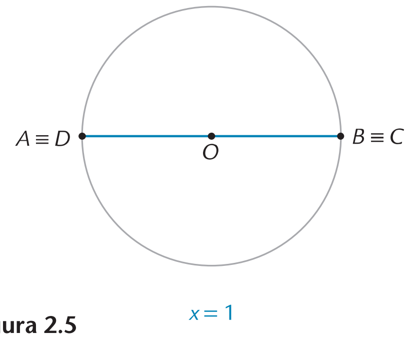


Figura 2.5

Escludendo i due casi limite, $x = 0$ e $x = 1$, poiché in questi casi il rettangolo $ABCD$ degenera in un segmento (come mostrato nelle **figg. 2.4** e **2.5**), concludiamo che il dominio della funzione, in relazione al problema, è l'intervallo $(0, 1)$. Osserva che il dominio naturale della funzione, indipendentemente dal problema geometrico, sarebbe invece l'intervallo $[-1, 1]$.

Il grafico di una funzione

Data una funzione $f: A \to B$, si chiama **grafico** della funzione l'insieme:

$$\{(x, f(x)) \mid x \in A\}$$

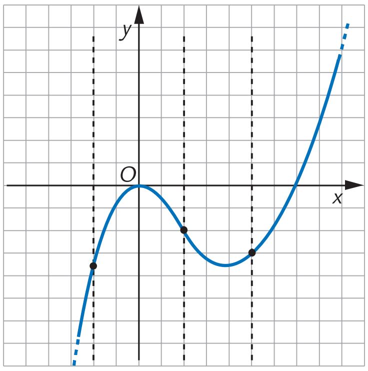
Se f è una funzione reale di variabile reale, si usa «tracciare il grafico» della funzione, cioè rappresentare nel piano cartesiano l'insieme dei punti di coordinate (x, y) tali che $y = f(x)$.

Ciò che contraddistingue, nel piano cartesiano, il grafico di una *funzione* è il fatto che **nessuna retta verticale** (parallela all'asse y) può intersecarlo in due punti distinti (ciò infatti violerebbe la definizione di funzione, perché significherebbe che allo stesso valore di x sono associati due valori di y).

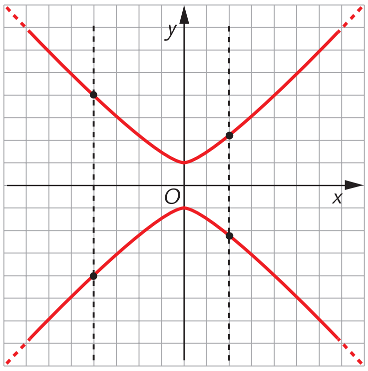
ESEMPI Riconoscere il grafico di una funzione

Riconosciamo se le seguenti curve rappresentano il grafico di una funzione:

a



b



a. La curva tracciata in **fig. a** rappresenta il grafico di una funzione perché, comunque si tracci una retta verticale, essa interseca il grafico della funzione in un unico punto.

b. Poiché ciascuna delle rette tratteggiate in **fig. b** interseca la curva in due punti distinti, **non** si tratta del grafico di una funzione.

Almeno nei casi più semplici, il grafico di una funzione di cui sia data l'equazione può essere tracciato per punti.

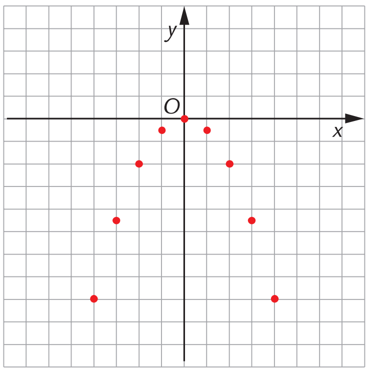
ESEMPIO Tracciare il grafico di una funzione per punti

Tracciamo per punti il grafico della funzione $y = -\frac{1}{2}x^2$.

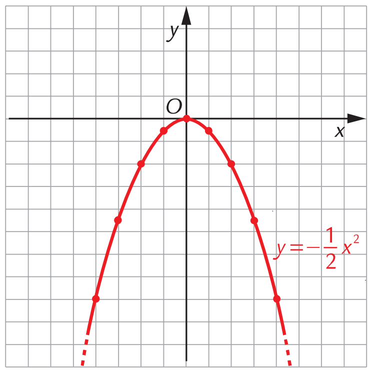
1° passo: costruiamo una tabella di valori per x e y

x	y
-4	$-\frac{1}{2}(-4)^2 = -8$
-3	$-\frac{1}{2}(-3)^2 = -\frac{9}{2}$
-2	$-\frac{1}{2}(-2)^2 = -2$
-1	$-\frac{1}{2}(-1)^2 = -\frac{1}{2}$
0	$-\frac{1}{2}(0)^2 = 0$
1	$-\frac{1}{2}(1)^2 = -\frac{1}{2}$
2	$-\frac{1}{2}(2)^2 = -2$
3	$-\frac{1}{2}(3)^2 = -\frac{9}{2}$
4	$-\frac{1}{2}(4)^2 = -8$

2° passo: rappresentiamo i punti corrispondenti sul piano cartesiano



3° passo: congiungiamo i punti con una linea continua



L'uguaglianza di due funzioni

Due funzioni si dicono **uguali** se hanno lo stesso *grafico*. Pertanto possiamo dare la seguente definizione più particolareggiata.

FUNZIONI UGUALI

Due funzioni f e g sono **uguali** se hanno lo stesso dominio A e inoltre risulta:

$$f(x) = g(x) \text{ per ogni } x \in A$$

Esempio

Le due funzioni definite da:

$$f(x) = x^2 - 1 \text{ e } g(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 + 1}$$

sono uguali.

Infatti hanno lo stesso dominio, **R**, e per ogni $x \in \mathbf{R}$ risulta:

$$g(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 + 1} = \frac{(x^2 - 1)\cancel{(x^2 + 1)}}{\cancel{(x^2 + 1)}} = $$
$$= x^2 - 1 = f(x)$$

Controesempio

Le due funzioni

$$f(x) = x + 1 \text{ e } g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

non sono uguali.

Infatti **non** hanno lo stesso dominio: la funzione f è definita in **R** mentre la funzione g è definita in $\mathbf{R} - \{1\}$. Si può tuttavia verificare che per ogni $x \neq 1$ risulta $f(x) = g(x)$, quindi il grafico delle due funzioni differisce solo per un punto (**fig. 2.6**).

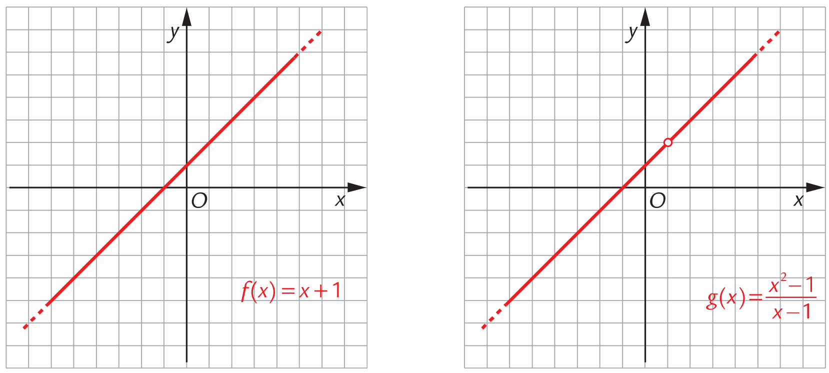


Figura 2.6 Il grafico della funzione g differisce da quello della funzione f per il fatto che non vi appartiene il punto di coordinate $(1, 2)$.

Prova tu

ESERCIZI a p. 88

1. Stabilisci se le seguenti relazioni definiscono delle funzioni:

a. la relazione che associa a ogni regione d'Italia i suoi capoluoghi di provincia (considera come dominio e codominio, rispettivamente, l'insieme delle regioni e dei capoluoghi di provincia d'Italia);

b. la relazione che associa a ogni persona il suo anno di nascita (considera come dominio un insieme di persone e come codominio **N**);

2. Data la funzione $f(x) = x^4 - x^2$, determina:

a. $f(\sqrt{2})$ **b.** $f(-2)$ **c.** $f(2x) + f(x)$

3. Classifica le seguenti funzioni e individua il loro dominio:

a. $y = \dfrac{x^2}{x - 1}$ **c.** $y = x^7 - x^5$

b. $y = \dfrac{3x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$ **d.** $y = \sqrt{5x - x^2} + \sqrt[3]{x}$

4. Traccia per punti il grafico delle seguenti funzioni, dopo aver individuato il dominio di ciascuna:

a. $y = x + 1$ **b.** $y = -\dfrac{1}{2}x^2$ **c.** $y = \sqrt{x + 1}$

5. Stabilisci se le seguenti funzioni f e g sono uguali:

$$f(x) = \frac{x^4 - 16}{x^2 - 4}; \quad g(x) = x^2 + 4$$

2. Prime proprietà delle funzioni reali di variabile reale

Come abbiamo anticipato, lo studio delle funzioni reali di variabile reale sarà il «filo rosso» che, a volte esplicitamente, a volte implicitamente, legherà tutti gli argomenti che affronteremo. Abbiamo già visto, nel paragrafo precedente, come determinare il dominio di una funzione reale di variabile reale. Man mano che approfondiremo le nostre conoscenze acquisiremo strumenti matematici sempre più «sofisticati» che, al termine del percorso, ci metteranno in grado di determinare tutte le più importanti caratteristiche di una funzione reale di variabile reale. In questo paragrafo vogliamo cominciare a riflettere su alcune di queste caratteristiche.

Il segno di una funzione

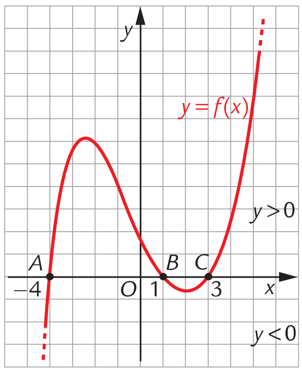
Dopo aver determinato il dominio di una funzione $y = f(x)$, la «seconda fase» di uno studio elementare della funzione consiste nello studio del **segno** della funzione. Si tratta cioè di stabilire per quali valori di x del dominio risulta

$$f(x) < 0, \quad f(x) = 0 \quad \text{o} \quad f(x) > 0$$

Il grafico di $y = f(x)$:
- è «al di sopra» dell'asse x in corrispondenza dei valori di x per cui $f(x) > 0$; per questi valori di x la funzione si dice **positiva**;
- incontra l'asse x in corrispondenza dei valori di x per cui $f(x) = 0$; questi valori di x si dicono **zeri** della funzione e si dice che la funzione si **annulla** in corrispondenza di essi;
- è «al di sotto» dell'asse x in corrispondenza dei valori di x per cui $f(x) < 0$; per questi valori di x la funzione si dice **negativa**.

ESEMPIO Deduzione del segno e degli zeri dal grafico

Consideriamo la funzione $y = f(x)$, il cui grafico è tracciato in figura, e stabiliamo dove essa è positiva, dove è negativa e quali sono i suoi zeri.



Possiamo osservare che:
- per $x < -4$ e per $1 < x < 3$ il grafico della funzione è al di sotto dell'asse x, quindi la funzione è *negativa*;
- per $x = -4$, per $x = 1$ e per $x = 3$ la funzione si annulla, quindi la funzione ha tre *zeri*: -4, 1 e 3;
- per $-4 < x < 1$ e per $x > 3$ il grafico della funzione è al di sopra dell'asse x, quindi la funzione è *positiva*.

Dal punto di vista algebrico:
- per stabilire quando la funzione $y = f(x)$ è *positiva* bisogna risolvere la disequazione $f(x) > 0$;
- per determinare gli *zeri* della funzione occorre risolvere l'equazione $f(x) = 0$;
- per stabilire quando la funzione è *negativa* bisogna risolvere la disequazione $f(x) < 0$.

ESEMPIO Studio del segno di una funzione polinomiale

Determiniamo il dominio e il segno della funzione $y = x^3(x^2 - 4)$ e rappresentiamo graficamente le regioni del piano cartesiano alle quali appartiene il suo grafico.

- **Dominio**
  Si tratta di una funzione polinomiale, quindi è definita in **R**.

- **Studio del segno**
  $y > 0 \Rightarrow x^3(x^2 - 4) > 0 \Rightarrow -2 < x < 0 \vee x > 2$ Risolvendo la disequazione

→

$y = 0 \Rightarrow x^3(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x = -2 \vee x = 0 \vee x = 2$ Risolvendo l'equazione. La funzione ha tre zeri: $-2, 0, 2$

$y < 0 \Rightarrow x^3(x^2 - 4) < 0 \Rightarrow x < -2 \vee 0 < x < 2$ Basta determinare il complementare rispetto al dominio dell'insieme dei valori di x per cui $y \geq 0$

- **Rappresentazione delle regioni del piano cui appartiene il grafico**
Dalle informazioni acquisite deduciamo che il grafico della funzione appartiene alla regione di piano cartesiano colorata in fig. 2.7. Nel grafico, abbiamo indicato con un punto pieno gli *zeri*.

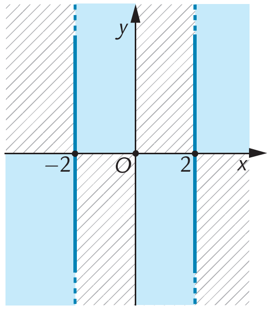


Figura 2.7 Per $x < -2$ e per $0 < x < 2$, la funzione è *negativa*, quindi il suo grafico è al di sotto dell'asse x: abbiamo perciò evidenziato in azzurro la corrispondente parte al di sotto dell'asse x ed «escluso» con un tratteggio la parte al di sopra dell'asse x. Analogamente negli intervalli $-2 < x < 0$ e $x > 2$ dove la funzione è *positiva*.

ESEMPIO **Studio del segno di una funzione irrazionale**

Determiniamo il dominio e il segno della funzione $y = \sqrt{x^2 - 1} - 2$ e rappresentiamo graficamente le regioni del piano cartesiano alle quali appartiene il suo grafico.

- **Dominio**
La funzione è definita per $x^2 - 1 \geq 0$, cioè per $x \leq -1 \vee x \geq 1$.

- **Studio del segno**

$y > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 1} - 2 > 0 \Rightarrow x^2 - 1 > 4 \Rightarrow x < -\sqrt{5} \vee x > \sqrt{5}$

$y = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 1} - 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5}$ Ci sono 2 zeri

$y < 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 1} - 2 < 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x^2 - 1 < 4 \end{cases} \Rightarrow -\sqrt{5} < x \leq -1 \vee 1 \leq x < \sqrt{5}$

- **Rappresentazione delle regioni del piano cui appartiene il grafico**
In base alle informazioni che abbiamo dedotto, il grafico della funzione appartiene alla regione di piano cartesiano colorata in fig. 2.8.

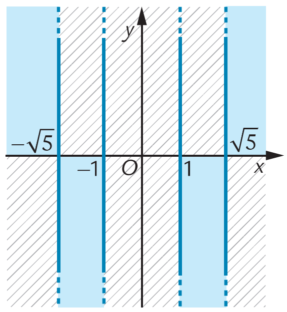


Figura 2.8 Abbiamo escluso la striscia di piano i cui punti sono tali che $-1 < x < 1$ perché la funzione non è ivi definita; le restanti parti sono state «escluse», e risultano perciò indicate con un tratteggio, in base alle considerazioni dedotte dallo studio del segno.

Attenzione!
Invece di risolvere la disequazione, per determinare i valori di x per cui $y < 0$ si poteva determinare il complementare **rispetto al dominio** (non a tutto **R** come nell'esempio precedente) dell'insieme dei valori di x per cui $y \geq 0$.

Funzioni pari e funzioni dispari

Un'altra caratteristica di una funzione che possiamo fin d'ora riconoscere è l'eventuale **simmetria** del suo grafico.
Osserviamo per esempio il grafico della funzione $y = f(x)$ in fig. 2.9. Esso ha la caratteristica di essere simmetrico rispetto all'asse y. Ciò significa che, per ogni suo punto $P(x, y)$, anche il punto $P'(-x, y)$, suo simmetrico rispetto all'asse y, vi appartiene. Alle funzioni che hanno questa proprietà si dà un nome particolare.

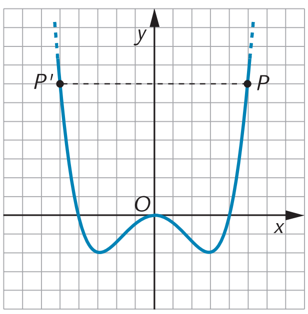


Figura 2.9

FUNZIONI PARI

Una funzione definita da $y = f(x)$ si dice **pari** se per ogni x appartenente al dominio della funzione anche $-x$ vi appartiene e risulta:

$$f(-x) = f(x)$$

In tal caso, il grafico della funzione risulta simmetrico rispetto all'asse y.

In modo analogo, possiamo considerare le funzioni i cui grafici sono simmetrici rispetto all'origine: per esempio, il grafico in fig. 2.10.
In questo caso, per ogni punto $P(x, y)$ appartenente al grafico della funzione, anche il punto $P'(-x, -y)$, suo simmetrico rispetto all'origine, appartiene al grafico.

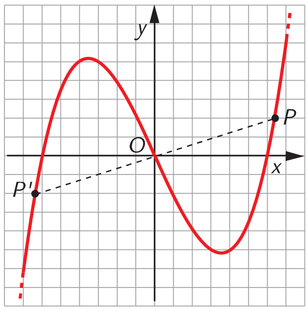


Figura 2.10

FUNZIONI DISPARI

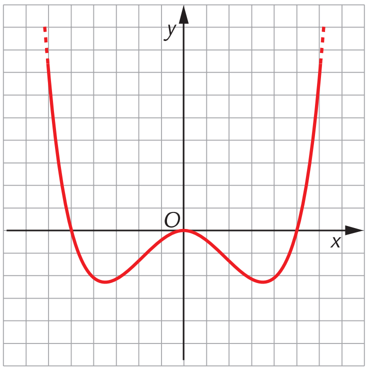
Una funzione definita da $y = f(x)$ si dice **dispari** se per ogni x appartenente al dominio della funzione anche $-x$ vi appartiene e risulta:

$$f(-x) = -f(x)$$

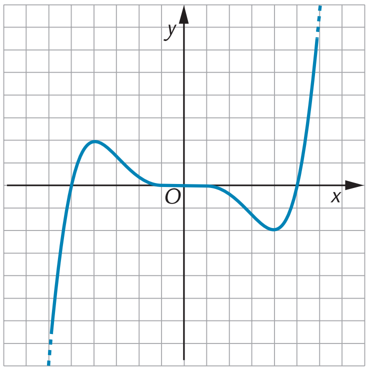
In tal caso, il grafico della funzione risulta simmetrico rispetto all'origine.

ESEMPI Riconoscere, dal grafico, se una funzione è pari o dispari

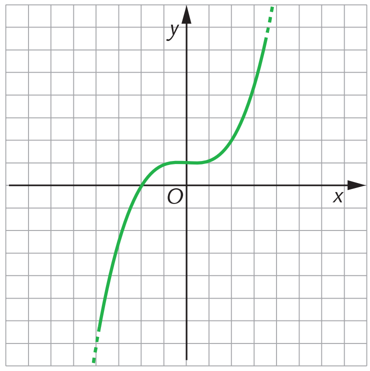
Stabiliamo se le funzioni che hanno i seguenti grafici sono pari, dispari o né una né l'altra cosa.



a



b



c

a. Il grafico in fig. a è simmetrico rispetto all'asse y, quindi è il grafico di una funzione *pari*.
b. Il grafico in fig. b è simmetrico rispetto all'origine, quindi è il grafico di una funzione *dispari*.
c. Il grafico in fig. c non è simmetrico né rispetto all'asse y, né rispetto all'origine, quindi è il grafico di una funzione che non è né pari né dispari.

ESEMPI Stabilire se una funzione di assegnata equazione è pari o dispari

Stabiliamo se le funzioni definite dalle seguenti equazioni sono pari o dispari.

a. $y = |x|$ **b.** $y = \sqrt{x}$ **c.** $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$ **d.** $y = x^5 - 1$

a. Sostituiamo $-x$ al posto di x in $f(x) = |x|$. Abbiamo:

$$f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$$

Ricorda che due numeri opposti hanno lo stesso valore assoluto

Concludiamo che la funzione assegnata è *pari*.

b. La funzione $y = \sqrt{x}$ è definita soltanto per $x \geq 0$. Per ogni $x > 0$ si ha che $f(x)$ esiste mentre $f(-x)$ non esiste: perciò la funzione data non è né pari né dispari.

→

c. Sostituiamo $-x$ al posto di x in $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$. Abbiamo:

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2+1} = -\frac{x^3}{x^2+1} = -f(x)$$

Concludiamo che la funzione assegnata è *dispari*.

d. Sostituiamo $-x$ al posto di x in $f(x) = x^5 - 1$. Abbiamo:

$$f(-x) = -x^5 - 1$$

È chiaro che risulta $f(-x) \neq f(x)$; essendo anche $f(-x) \neq -f(x)$ (poiché $-f(x) = -x^5 + 1$), la funzione data non è né pari né dispari.

Funzioni crescenti e funzioni decrescenti

Terminiamo questo paragrafo introducendo un'altra importante caratteristica che può presentare il grafico di una funzione. Osserva il grafico della funzione in **fig. 2.11**.

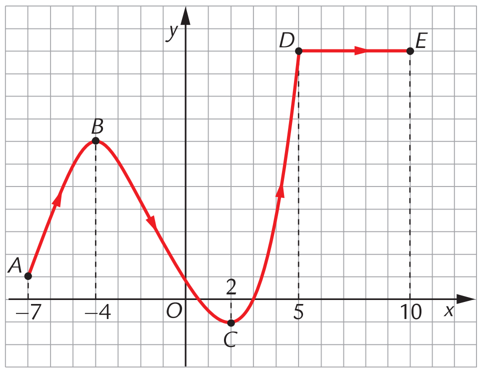
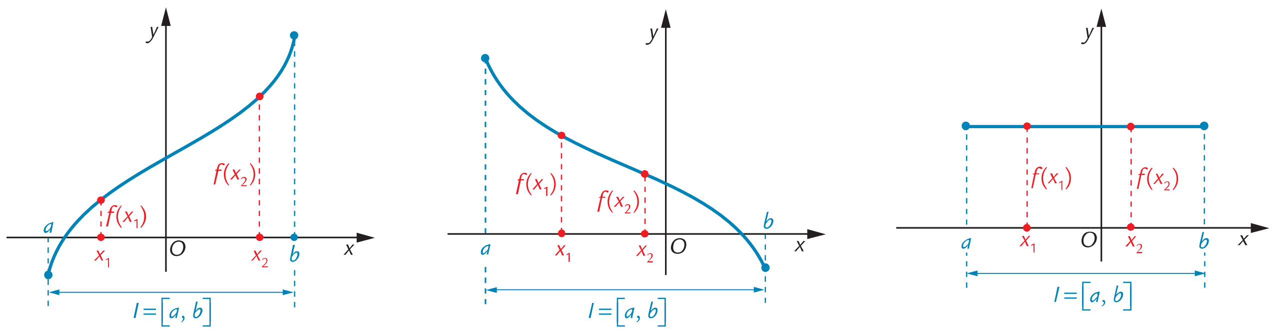


Figura 2.11

Se immaginiamo che un punto mobile «percorra» il grafico a partire dal punto A fino ad arrivare al punto E, nel verso indicato dalle frecce, ci accorgiamo che:

- da A a B il punto si muove nel verso delle ordinate positive, cioè «sale»;
- da B a C il punto si muove nel verso delle ordinate negative, cioè «scende»;
- da C a D il punto torna a «salire»;
- da D ad E il punto percorre un tratto «costante» (né in salita né in discesa).

Per descrivere questi tre possibili comportamenti del grafico di una funzione, introduciamo alcune definizioni, illustrate in **fig. 2.12** e formalizzate a pagina seguente.



a. Per ogni $x_1 < x_2$ risulta $f(x_1) < f(x_2)$: la funzione è strettamente *crescente* in $[a, b]$.

b. Per ogni $x_1 < x_2$ risulta $f(x_1) > f(x_2)$: la funzione è strettamente *decrescente* in $[a, b]$.

c. Per ogni x_1, x_2 risulta $f(x_1) = f(x_2)$: la funzione è *costante* in $[a, b]$.

Figura 2.12

Per esempio, la funzione il cui grafico è tracciato in **fig. 2.11** è:

- *strettamente crescente* nell'intervallo $[-7, -4]$ e nell'intervallo $[2, 5]$;
- *strettamente decrescente* nell'intervallo $[-4, 2]$;
- *costante* nell'intervallo $[5, 10]$.

FUNZIONI STRETTAMENTE CRESCENTI, DECRESCENTI E COSTANTI

Sia I un sottoinsieme del dominio della funzione $y = f(x)$.

a. f si dice **strettamente crescente** in I se:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \text{ per ogni } x_1, x_2 \in I$$

b. f si dice **strettamente decrescente** in I se:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \text{ per ogni } x_1,\ x_2 \in I$$

c. f si dice **costante** in I se:

$$f(x_1) = f(x_2) \text{ per ogni } x_1,\ x_2 \in I$$

Osserva

L'insieme I può coincidere con il dominio della funzione o essere un suo sottoinsieme proprio.

Nell'intervallo [2, 10] la funzione in fig. 2.11 **non** è strettamente crescente, perché è costante in [5, 10], però non decresce. Per descrivere anche questo comportamento si introducono le seguenti definizioni.

FUNZIONI CRESCENTI E DECRESCENTI IN SENSO LATO

Sia I un sottoinsieme del dominio della funzione $y = f(x)$.

a. f si dice **crescente in senso lato** in I se:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \text{ per ogni } x_1,\ x_2 \in I$$

b. f si dice **decrescente in senso lato** in I se:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \text{ per ogni } x_1,\ x_2 \in I$$

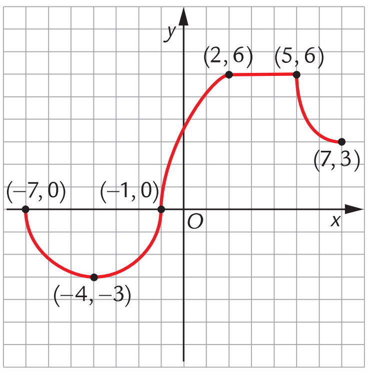
Modi di dire

Alcuni testi chiamano **funzioni crescenti** (**decrescenti**) quelle che noi abbiamo chiamato strettamente crescenti (strettamente decrescenti), e **non crescenti** (**non decrescenti**) le funzioni che noi abbiamo chiamato decrescenti in senso lato (crescenti in senso lato).

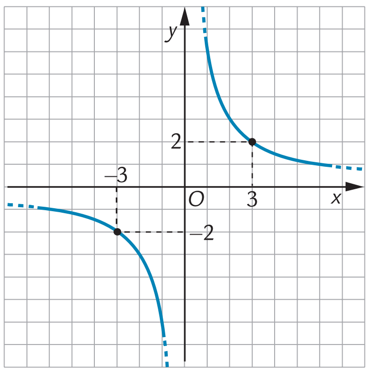
Possiamo allora dire, per esempio, che la funzione rappresentata in fig. 2.11 è crescente in senso lato nell'intervallo [2, 10].

ESEMPI Stabilire dal grafico gli intervalli in cui una funzione è crescente o decrescente

Stabiliamo gli intervalli dove le funzioni, i cui grafici sono tracciati nelle figure seguenti, sono crescenti o decrescenti, in senso stretto o in senso lato.



a



b

a. La funzione il cui grafico è tracciato in fig. a è strettamente decrescente negli intervalli [−7, − 4] e [5, 7], costante nell'intervallo [2, 5] e strettamente crescente nell'intervallo [−4, 2]. Nell'intervallo [2, 7] la funzione è decrescente in senso lato.

b. La funzione è strettamente decrescente in ciascuno dei due intervalli $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$, ma **non** è strettamente decrescente in tutto il suo dominio, cioè in $\mathbf{R} - \{0\}$.

Infatti puoi osservare per esempio che:

$$-3 < 3 \quad \text{ma} \quad f(-3) = -2 < f(3) = 2$$

Nel prosieguo, quando parleremo semplicemente di funzione «crescente» o «decrescente», senza specificare se in senso stretto o in senso lato, converremo di riferirci a funzioni *crescenti* o *decrescenti in senso stretto*.

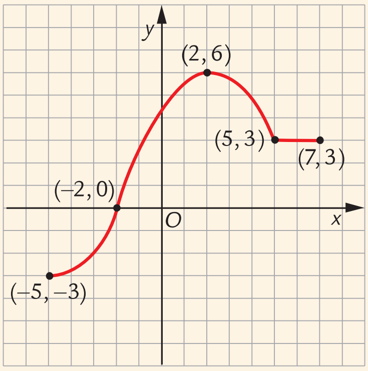
FUNZIONE MONOTÒNA
Una funzione crescente o decrescente (in senso stretto o lato) in un insieme I viene detta **monotòna** in I.

Prova tu ESERCIZI a p. 98

1. Determina il dominio e il segno delle seguenti funzioni e rappresenta le regioni del piano cartesiano alle quali appartiene il grafico di ciascuna. Stabilisci inoltre se ciascuna funzione è pari o dispari.

a. $y = 1 - \sqrt{x}$ **b.** $y = x^2 - 4x$ **c.** $y = \sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{3}$ **d.** $y = \dfrac{x^2 - 1}{x}$ **e.** $y = |x| - 1$ **f.** $y = \sqrt{x^2 - |x|}$

2. In riferimento alla funzione il cui grafico è rappresentato nella figura qui sotto, stabilisci se le seguenti affermazioni sono vere o false.



a. la funzione è strettamente crescente in $[-5, 3]$ V F
b. la funzione è pari V F
c. la funzione è strettamente decrescente in $[2, 7]$ V F
d. la funzione è costante in $[5, 7]$ V F
e. la funzione è decrescente in senso lato in $[2, 7]$ V F
f. la funzione è dispari V F
g. la funzione ha un solo zero V F
h. la funzione è strettamente crescente in $[-5, 2]$ V F

3. Funzioni iniettive, suriettive, biiettive

Abbiamo visto, nelle pagine precedenti, una classificazione delle funzioni reali di variabile reale (algebrica razionale, irrazionale, intera o frazionaria oppure trascendente), in base alle caratteristiche dell'espressione $f(x)$ che compare nell'equazione $y = f(x)$ che definisce la funzione. Un'altra classificazione delle funzioni si basa invece sul comportamento della funzione rispetto all'insieme di arrivo, cioè al *codominio*.
In questo paragrafo vediamo come si possono classificare le funzioni secondo quest'altro punto di vista.

Funzioni iniettive

Introduciamo anzitutto la seguente definizione.

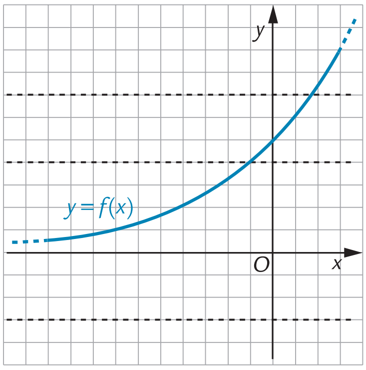
FUNZIONE INIETTIVA
Una funzione $f : A \to B$ si dice **iniettiva** se **ogni** elemento di B ha **al massimo** una controimmagine in A.

In simboli
Possiamo scrivere che f è iniettiva quando si verifica che $\forall x_1, x_2 \in A$:
$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

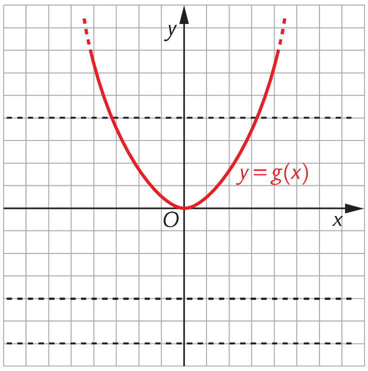
In modo equivalente, si può dire che una funzione è **iniettiva** se manda elementi distinti in elementi distinti.
Data una funzione reale di variabile reale (per cui, salvo diversa indicazione, si assume come codominio $\mathbf{R}$), essa sarà iniettiva se e solo se ogni elemento di $\mathbf{R}$ ha al massimo una controimmagine: ciò equivale a dire che *ogni* retta orizzontale deve intersecare il grafico della funzione *al massimo* in un punto.

ESEMPI **Stabilire se una funzione di cui è dato il grafico è iniettiva**

Stabiliamo se le funzioni aventi i seguenti grafici sono iniettive.



a



b

a. La funzione in **fig. a** è iniettiva. Come puoi osservare, infatti, ogni retta orizzontale interseca il grafico della funzione in *al massimo* un punto.

b. La funzione in **fig. b** **non** è iniettiva. Come puoi osservare, infatti, ogni retta orizzontale che giace nel primo e nel secondo quadrante interseca il grafico della funzione in *due* punti.

Data una funzione reale di variabile reale di equazione $y = f(x)$:

- per dimostrare che **non** è iniettiva basta esibire *una* coppia di elementi distinti x_1, x_2, appartenenti al dominio della funzione, tali che $f(x_1) = f(x_2)$;
- per provare invece che f è iniettiva occorre mostrare che, *per ogni* x_1, x_2 appartenenti al dominio, vale l'implicazione: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

ESEMPI **Stabilire se una funzione di cui è data l'equazione è iniettiva**

Stabiliamo se le seguenti funzioni sono iniettive:

a. $y = \frac{1}{2}x + 3$ **b.** $y = x^2 - 2x$

a. La funzione è iniettiva. Infatti:

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{2}x_1 + 3 = \frac{1}{2}x_2 + 3 \Rightarrow$ Essendo $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$

$\Rightarrow \frac{1}{2}x_1 = \frac{1}{2}x_2 \Rightarrow$ Sottraendo dai due membri 3 (1° principio di equivalenza delle equazioni)

$\Rightarrow x_1 = x_2$ Moltiplicando i due membri per 2 (2° principio di equivalenza delle equazioni)

b. Basta osservare, per esempio, che $f(0) = f(2) = 0$ per concludere che la funzione **non** è iniettiva.

Funzioni suriettive

Definiamo ora che cosa si intende per funzione *suriettiva*.

FUNZIONE SURIETTIVA
Una funzione $f : A \to B$ si dice **suriettiva** se **ogni** elemento di B ha **almeno** una controimmagine in A.

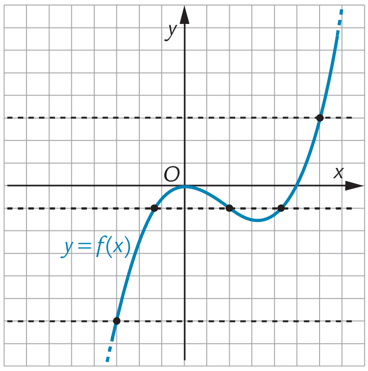
In simboli
Possiamo scrivere che f è suriettiva quando si verifica che $\forall y \in B$: $\exists x \in A \,|\, f(x) = y$.

In modo equivalente, si può dire che una funzione è suriettiva se la sua immagine coincide con il codominio.

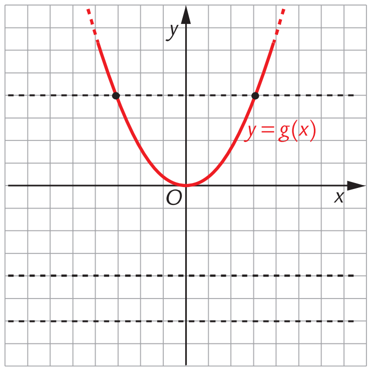
Data una funzione reale di variabile reale (per cui, salvo diversa indicazione, si assume come codominio **R**), essa sarà suriettiva se e solo se ogni elemento di **R** ha almeno una controimmagine: ciò equivale a dire che *ogni* retta orizzontale deve intersecare il grafico della funzione *in almeno* un punto.

ESEMPI **Stabilire se una funzione di cui è dato il grafico è suriettiva**

Stabiliamo se le funzioni aventi i seguenti grafici sono suriettive.



a



b

a. La funzione in **fig. a** è suriettiva. Come puoi osservare, infatti, ogni retta orizzontale interseca il grafico della funzione in *almeno* un punto.

b. La funzione in **fig. b** **non** è suriettiva. Come puoi osservare, infatti, ogni retta orizzontale che giace nel terzo e nel quarto quadrante non ha alcun punto in comune con il grafico della funzione. Per rendere la funzione suriettiva, occorrerebbe restringere il codominio all'intervallo $[0, +\infty)$.

Algebricamente, data una funzione reale di variabile reale di equazione $y = f(x)$, essa è suriettiva se e solo se, per ogni $y \in \mathbf{R}$, l'equazione $f(x) = y$ (nell'incognita x) ha almeno una soluzione reale.

ESEMPI **Stabilire se una funzione di cui è data l'equazione è suriettiva**

Stabiliamo se le seguenti funzioni sono suriettive:

a. $y = \frac{1}{2}x + 3$ **b.** $y = x^2 - 2x$

Suggerimento
Immagina che x sia l'incognita e y rappresenti un parametro.

a. L'equazione $y = \frac{1}{2}x + 3$ è di primo grado rispetto all'incognita x e, per ogni $y \in \mathbf{R}$, ammette come soluzione $x = 2y - 6$. Possiamo quindi affermare che si tratta di una funzione *suriettiva*.

b. L'equazione $y = x^2 - 2x$, equivalente a $x^2 - 2x - y = 0$, è di secondo grado rispetto all'incognita x e ammette soluzioni reali se e solo se $\Delta \geq 0$; la condizione di realtà delle soluzioni equivale alla seguente disequazione, che risolviamo:

$$4 + 4y \geq 0 \Rightarrow y \geq -1$$

Vediamo così che l'equazione $x^2 - 2x - y = 0$ (nell'incognita x) non ammette soluzioni per ogni $y \in \mathbf{R}$ ma solo se y appartiene all'intervallo $[-1, +\infty)$. **Non** si tratta quindi di una funzione suriettiva.

Funzioni biiettive

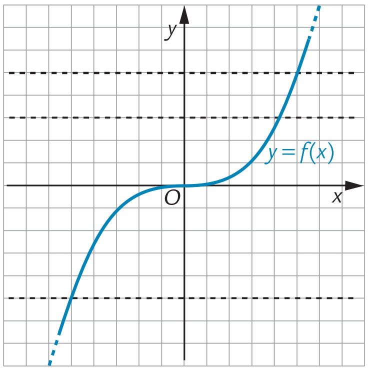
Si dà un nome particolare alle funzioni che sono sia iniettive sia suriettive.

FUNZIONE BIIETTIVA
Una funzione $f : A \rightarrow B$ che è sia iniettiva sia suriettiva si dice **biiettiva** (o **corrispondenza biunivoca** o **corrispondenza uno a uno**).

In modo equivalente, si può dire che una funzione $f : A \to B$ è biiettiva se ogni elemento di B ha **una e una sola** controimmagine in A.
Data una funzione reale di variabile reale, essa sarà biiettiva se e solo se *ogni* retta orizzontale interseca il grafico della funzione in *uno e un solo* punto.

Esempi

La funzione che ha il grafico riportato in figura è biiettiva.



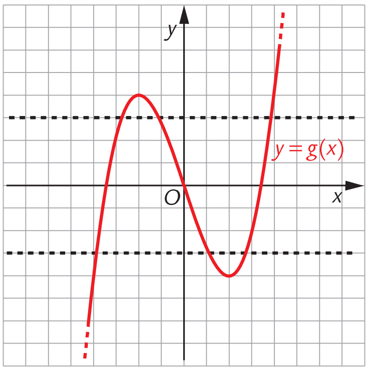
Infatti ogni retta orizzontale interseca il grafico della funzione in uno e un solo punto.

La funzione $y = \frac{1}{2}x + 3$ è biiettiva.

Abbiamo visto negli esempi precedenti che è iniettiva e suriettiva.

Controesempi

La funzione che ha il grafico riportato in figura **non** è biiettiva.



Infatti non è iniettiva: ci sono rette orizzontali che intersecano il grafico della funzione in più di un punto.

La funzione $y = x^2 - 2x$ **non** è biiettiva.

Abbiamo visto negli esempi precedenti che non è né iniettiva né suriettiva.

Rifletti

Le definizioni di funzione iniettiva, suriettiva e biiettiva si possono interpretare come illustrato qui di seguito in relazione alla teoria delle equazioni. Una funzione $f : A \to B$ è:
a. *iniettiva* quando, per ogni $b \in B$, l'equazione $f(x) = b$ ha al massimo una soluzione in A;
b. *suriettiva* quando, per ogni $b \in B$, l'equazione $f(x) = b$ ha almeno una soluzione in A;
c. *biiettiva* quando, per ogni $b \in B$, l'equazione $f(x) = b$ ha una e una sola soluzione in A.

Una funzione può essere: iniettiva ma non suriettiva, suriettiva ma non iniettiva, né iniettiva né suriettiva, biiettiva. **Riassumendo**, la classificazione delle funzioni in base al comportamento rispetto al codominio si può quindi rappresentare mediante il diagramma di Venn in **fig. 2.13**.

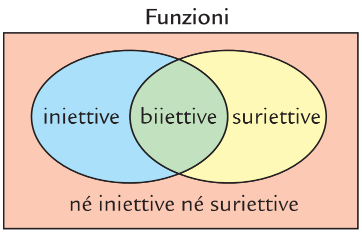
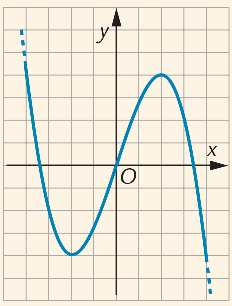


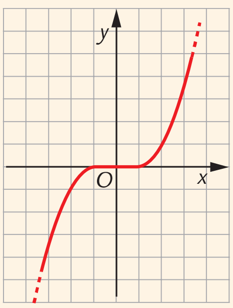
Figura 2.13

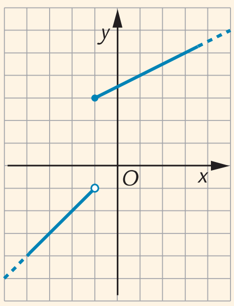
Prova tu

ESERCIZI a p. 102

1. Nelle seguenti figure sono riportati i grafici di alcune funzioni. Stabilisci se si tratta di funzioni iniettive, suriettive o biiettive.







2. Stabilisci se le funzioni seguenti, di cui è data l'equazione, sono iniettive, suriettive o biiettive:

a. $y = -\frac{1}{2}x - 2$ **b.** $y = \frac{1}{2}\sqrt[3]{x}$ **c.** $y = x^2 - 1$

3. Una funzione strettamente crescente (o strettamente decrescente) nel suo dominio è sempre suriettiva? È sempre iniettiva?

4. Funzione inversa

Attenzione!

Alcuni testi pongono il problema dell'invertibilità di una funzione in modo leggermente diverso: si definisce **inversa** di una funzione $f: A \to B$ (se esiste) la funzione $f^{-1}: B \to A$ che a ogni elemento di B associa la sua controimmagine nella f (mentre noi abbiamo definito come funzione inversa la funzione $f^{-1}: f(A) \to A$ che a ogni elemento di $f(A)$ associa la sua controimmagine nella f). Con questa impostazione una funzione f risulta invertibile se e solo se è *biiettiva*. La più recente letteratura scientifica tende a seguire l'impostazione che noi abbiamo proposto.

Consideriamo la funzione f, rappresentata nella fig. 2.14, e costruiamo la relazione g, definita fra l'immagine $I = f(A)$ di f e l'insieme A, che si ottiene invertendo il verso delle frecce (fig. 2.15).

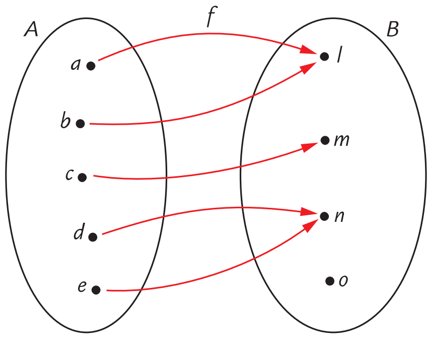


Figura 2.14

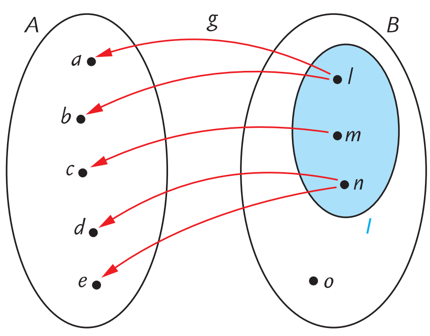


Figura 2.15

La relazione g associa, a ciascun elemento di I, le sue controimmagini tramite f. La relazione g **non** è una *funzione*, perché ci sono elementi di I da cui parte più di una freccia. Come deve essere f affinché g sia una funzione?
In base a come abbiamo definito la relazione g, occorre che da ogni elemento di I esca una e una sola freccia verso A, ovvero ogni elemento di I deve avere un'*unica* controimmagine nella f. Ciò equivale a dire che la funzione f deve essere *iniettiva*.
In tal caso, la relazione g definisce una nuova funzione, che si chiama funzione *inversa* di f. Queste osservazioni giustificano la seguente definizione.

Attenzione!

In questo contesto il simbolo f^{-1} indica solo la funzione inversa di f, **non** ha il significato di «f elevato alla -1», cioè di $\frac{1}{f}$.

FUNZIONE INVERTIBILE

Una funzione f si dice **invertibile** se e solo se è iniettiva: in tal caso, si chiama **funzione inversa** di f, e si indica con il simbolo f^{-1}, la funzione che associa a ciascun elemento dell'immagine di f la sua (unica) controimmagine.

Nota che il dominio di f^{-1} è l'immagine di f e l'immagine di f^{-1} è il dominio di f.
Supponiamo che $y = f(x)$ sia una funzione invertibile, reale di variabile reale.
C'è qualche relazione che lega il grafico della funzione f e quello della sua funzione inversa f^{-1}? Proviamo a riflettere: sia $P(a, b)$ un punto appartenente al grafico della funzione f. Ciò significa che $f(a) = b$, vale a dire $f^{-1}(b) = a$. Dunque se $P(a, b)$ appartiene al grafico di f, allora $P'(b, a)$ appartiene al grafico di f^{-1}.

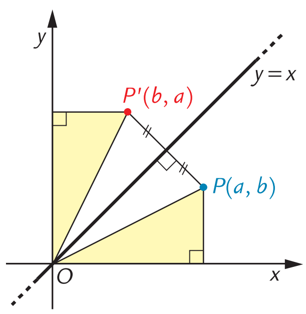


Figura 2.16

Poiché scambiare l'ascissa con l'ordinata nelle coordinate di un punto equivale a effettuare una simmetria rispetto alla bisettrice del primo e del terzo quadrante (fig. 2.16), deduciamo che:

Il grafico della funzione f^{-1}, inversa della funzione f, è il simmetrico del grafico di f rispetto alla bisettrice del primo e del terzo quadrante.

Dunque, una volta che è noto il grafico di f, per ottenere il grafico di f^{-1} basta effettuare una simmetria rispetto alla suddetta bisettrice.

ESEMPIO **Tracciare il grafico dell'inversa di una funzione**

In fig. 2.17 è tracciato il grafico di una funzione invertibile. Tracciamo il grafico della funzione inversa.

Osserviamo che il grafico in fig. 2.17 passa per i punti di coordinate $(-5, -5)$, $(1, -2)$, $(3, 1)$ e $(7, 3)$. Il grafico della funzione inversa passerà per i simmetrici di questi punti rispetto alla bisettrice del primo e del terzo quadrante. Quindi dovrà passare per i punti di coordinate $(-5, -5)$, $(-2, 1)$, $(1, 3)$ e $(3, 7)$. Il grafico della funzione inversa sarà allora quello in fig. 2.18.

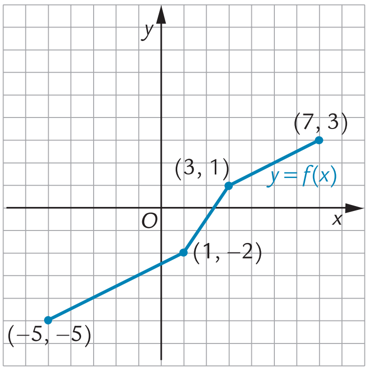


Figura 2.17

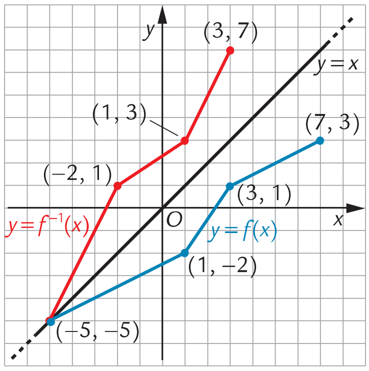


Figura 2.18

Il legame che abbiamo scoperto tra il grafico di una funzione invertibile e quello della sua inversa suggerisce anche come ricavare l'*equazione* che definisce la funzione inversa: basta effettuare una simmetria rispetto alla bisettrice del primo e del terzo quadrante, cioè scambiare nell'equazione della funzione x con y. In altre parole, se f è definita dall'equazione

$$y = f(x)$$

allora f^{-1} è definita dall'equazione:

$$x = f(y)$$

Quest'ultima equazione **non** è però espressa nella forma *esplicita* $y = f(x)$: risolvendola rispetto a y, otterremo l'equazione *esplicita* di f^{-1}.

ESEMPIO **Determinare l'espressione analitica dell'inversa di una funzione**

La funzione $f(x) = \sqrt[3]{x} - 1$ è invertibile. Determiniamo l'espressione analitica della funzione inversa.

- **1° passo** Consideriamo l'equazione $y = f(x)$:

  $$y = \sqrt[3]{x} - 1$$

  e sostituiamo in essa x al posto di y e y al posto di x:

  $$x = \sqrt[3]{y} - 1$$

- **2° passo** Risolviamo l'equazione ottenuta rispetto a y.

$x = \sqrt[3]{y} - 1$	Equazione da risolvere rispetto a y
$\sqrt[3]{y} - 1 = x$	Proprietà simmetrica dell'uguaglianza
$\sqrt[3]{y} = x + 1$	Isolando il radicale al 1° membro
$y = (x + 1)^3$	Elevando i due membri al cubo si ottiene un'equazione equivalente

Concludiamo che:

$$f^{-1}(x) = (x + 1)^3$$

SINTESI

Procedimento per ricavare l'equazione della funzione inversa di una funzione data

1. Nell'equazione $y = f(x)$, si sostituisce y al posto di x e x al posto di y, ottenendo così l'equazione:

   $x = f(y)$

2. Se possibile, si risolve l'equazione $x = f(y)$ rispetto a y in modo da ottenere l'equazione *esplicita* di f^{-1}.

È importante infine osservare che a volte una funzione può risultare **non** invertibile nel suo dominio, ma invertibile se la consideriamo definita in un opportuno sottoinsieme del dominio. Quando si considera una funzione definita su un sottoinsieme del suo dominio si parla di **restrizione** della funzione.

ESEMPIO **Restrizione di una funzione**

La funzione $y = x^2$ **non** è invertibile perché non è iniettiva (**fig. 2.19**).
È invece invertibile la sua restrizione all'intervallo $x \geq 0$, e la sua inversa è $y = \sqrt{x}$ (**fig. 2.20**).

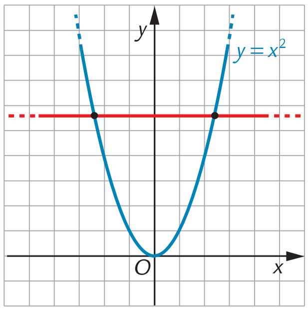


Figura 2.19 Ogni retta orizzontale che giace nel primo e nel secondo quadrante incontra il grafico della funzione in due punti distinti, quindi la funzione non è iniettiva, perciò nemmeno invertibile.

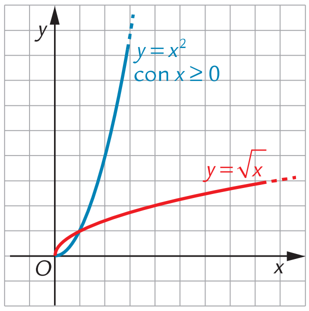


Figura 2.20 Il grafico della restrizione di $y = x^2$ all'intervallo $x \geq 0$ e della sua funzione inversa.

Prova tu

ESERCIZI a **p. 104**

1. Giustifica perché la funzione $f(x) = x^2 + 5x - 6$ **non** è invertibile.
2. Le funzioni seguenti sono invertibili. Dopo aver giustificato perché lo sono, determina l'espressione analitica della funzione inversa.

   a. $f(x) = 3x - 2$

   b. $f(x) = \dfrac{x-3}{2x+1}$

   $\left[\textbf{a. } f^{-1}(x) = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{2}{3}; \textbf{ b. } f^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{1-2x}\right]$

5. L'algebra delle funzioni e le funzioni composte

L'algebra delle funzioni

Nell'insieme delle funzioni reali di variabile reale possiamo introdurre delle operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione, del tutto analoghe a quelle che conosci per gli elementi degli insiemi numerici. Le definizioni sono le seguenti.

SOMMA, DIFFERENZA, PRODOTTO E QUOZIENTE DI DUE FUNZIONI

Date due funzioni f e g:

- la funzione **somma** $f+g$ è la funzione definita da:

  $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

- la funzione **differenza** $f-g$ è la funzione definita da:

  $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

- la funzione **prodotto** $f \cdot g$ è la funzione definita da:

  $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

- la funzione **quoziente** $\dfrac{f}{g}$ è la funzione definita da:

  $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

Le funzioni $f+g$, $f-g$ e $f \cdot g$ sono definite in corrispondenza dei valori di x per cui sono definite sia la funzione f sia la funzione g, quindi il loro dominio è l'**intersezione** del dominio di f e del dominio di g.

Il dominio di $\dfrac{f}{g}$ è costituito da tutti i valori di x per cui, oltre a essere definite le funzioni f e g, è anche $g(x) \neq 0$, quindi è costituito da tutti i valori di x, appartenenti all'**intersezione** del dominio di f e di quello di g, **tali che** $\boldsymbol{g(x) \neq 0}$.

ESEMPI Operazioni tra funzioni

Date le funzioni f e g definite da $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \sqrt{x-2}$, determiniamo l'espressione analitica delle seguenti funzioni e il loro dominio:

a. $f+g$ **b.** $f-g$ **c.** $f \cdot g$ **d.** $\dfrac{f}{g}$

a. La funzione $f+g$ è definita da:

$(f+g)(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x-2}$

La funzione f ha come dominio l'intervallo $[0, +\infty)$, la funzione g ha come dominio l'intervallo $[2, +\infty)$.
Il dominio di $f+g$ è allora l'intervallo $[2, +\infty)$, intersezione degli intervalli che costituiscono il dominio di f e il dominio di g.

b. La funzione $f-g$ è definita da:

$(f-g)(x) = \sqrt{x} - \sqrt{x-2}$

Il dominio di $f-g$ è ancora l'intervallo $[2, +\infty)$.

c. La funzione $f \cdot g$ è definita da:

$(f \cdot g)(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x-2}$

Il dominio di $f \cdot g$ è, come nei due esempi precedenti, l'intervallo $[2, +\infty)$.

d. La funzione $\dfrac{f}{g}$ è definita da:

$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}}$

Il dominio di $\dfrac{f}{g}$ è l'intervallo $(2, +\infty)$: esso è l'intersezione degli intervalli che costituiscono il dominio di f e il dominio di g, privata del valore $x = 2$ per cui si annulla la funzione g.

Attenzione!

La funzione prodotto $(f \cdot g)(x) = \sqrt{x}\sqrt{x-2}$ **non** è *uguale* alla funzione $h(x) = \sqrt{x(x-2)}$.
Infatti, in base alla definizione di uguaglianza di funzioni data nel Paragrafo 1, perché due funzioni siano uguali devono in particolare avere lo stesso *dominio*.
Invece il dominio di $f \cdot g$ è $[2, +\infty)$ mentre il dominio della funzione h è $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$.
Per ragioni analoghe la funzione quoziente $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}}$ **non** è *uguale* alla funzione $z(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x-2}}$.

Composizione di funzioni

Nell'insieme delle funzioni è possibile definire anche un nuovo tipo di operazione, diversa dalle usuali operazioni algebriche: l'operazione di *composizione*, definita come segue.

FUNZIONE COMPOSTA

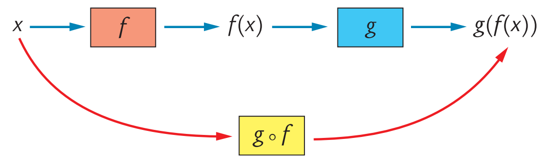
Date due funzioni f e g, si dice **funzione composta** di f e g, e si indica con il simbolo $g \circ f$ (che si legge: «g composto f»), la funzione definita da:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Attenzione!

La funzione f, pur essendo scritta nel simbolo $g \circ f$ per seconda, è la *prima* che viene applicata.

Graficamente:



Affinché sia possibile calcolare $g(f(x))$, $f(x)$ deve appartenere al dominio di g. Perciò il dominio di $g \circ f$ è costituito da tutti gli elementi appartenenti al dominio di f tali che $f(x)$ appartiene al dominio di g.

ESEMPIO **Determinare la funzione composta di due funzioni assegnate**

Sono date le funzioni $f(x) = x - 1$ e $g(x) = \sqrt{x+3}$. Determiniamo l'espressione analitica di $g \circ f$ e di $f \circ g$, specificando il dominio di tali funzioni.

Determiniamo l'espressione analitica di $g \circ f$:

$$(g \circ f)(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Definizione di} \\ \text{funzione composta}}}{=} g(f(x)) \underset{\substack{\uparrow \\ f(x) = x-1}}{=} g(x-1) \underset{\substack{\uparrow \\ g(x) = \sqrt{x+3}}}{=} \sqrt{(x-1)+3} = \sqrt{x+2}$$

Il dominio della funzione $g \circ f$ è costituito dai valori di x per cui $x + 2 \geq 0$, quindi è l'intervallo $[-2, +\infty)$.

Ragioniamo analogamente per determinare l'espressione analitica di $f \circ g$:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x+3}) = \sqrt{x+3} - 1$$

Il dominio della funzione $f \circ g$ è l'intervallo $[-3, +\infty)$ (coincide con il dominio della funzione g).

Osserva

Potevamo determinare il *dominio* della funzione composta $g \circ f$ anche senza determinare la sua espressione analitica. Sappiamo infatti che esso è costituito dai valori di x appartenenti al dominio di f (cioè, in questo caso, a $\mathbf{R}$) tali che $f(x) = x - 1$ appartiene al dominio di g (cioè, in questo caso, all'intervallo $[-3, +\infty)$). Pertanto il dominio di $g \circ f$ è l'insieme dei valori di x che soddisfano la seguente disequazione:

$x - 1 \geq -3 \Rightarrow x \geq -2$

Ritroviamo così che il dominio di $g \circ f$ è l'intervallo $[-2, +\infty)$.

L'esempio precedente mostra che può essere $g \circ f \neq f \circ g$: la composizione di funzione **non** è quindi una operazione *commutativa*.

Si potrebbe invece provare che la composizione di funzioni è un'operazione *associativa*, cioè che:

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

Prova tu **ESERCIZI** a p. **106**

1. Date le funzioni $f(x) = \sqrt{x-1}$ e $g(x) = \sqrt{5-x}$, scrivi l'espressione analitica delle seguenti funzioni e determina il dominio di ciascuna di esse:

   a. $f + g$ **c.** $f \cdot g$

   b. $f - g$ **d.** $\dfrac{f}{g}$

2. Considera le due funzioni $f(x) = 2x$ e $g(x) = (x+1)^2$.
   a. Calcola l'immagine di -1 tramite $g \circ f$ e tramite $f \circ g$.
   b. Determina l'espressione analitica di $g \circ f$ e di $f \circ g$.

3. Date le tre funzioni $f(x) = 2x$, $g(x) = \sqrt{|x|}$ e $h(x) = x^2$, verifica che $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

MATEMATICA NELLA STORIA

La nascita e lo sviluppo del concetto di funzione

È difficile tracciare un profilo accurato ed esauriente dello sviluppo storico del concetto di funzione, perché ha avuto un'evoluzione piuttosto lenta e discontinua. Esso infatti è comparso, a volte implicitamente, a volte esplicitamente, in problemi e tipi di rappresentazioni differenti. Ci limitiamo perciò a gettare uno sguardo su alcune delle «tappe» più importanti.

Leibniz, Bernoulli e Newton

La parola «funzione» compare per la prima volta in un manoscritto di **Leibniz** (1646-1716) del 1673, dal titolo *Methodus tangentium inversa seu de functionibus*, e si trova ripetutamente nella corrispondenza con il matematico svizzero **Johann Bernoulli** (1667-1748). Leibniz sviluppò, indipendentemente ma parallelamente rispetto a **Newton** (1642-1727), una parte importantissima della matematica che studieremo nel proseguimento di questo corso, il calcolo infinitesimale. Come vedremo, il calcolo infinitesimale riguarda sostanzialmente lo studio delle proprietà delle funzioni reali di variabile reale. Nelle loro originali elaborazioni, tuttavia, Leibniz e Newton non si riferirono a funzioni, ma a «curve», intese come luogo di punti del piano che soddisfano un'equazione del tipo $P(x, y) = 0$, dove $P(x, y)$ è un polinomio nelle variabili x e y.

Leibniz.

Eulero

È con il matematico svizzero **Eulero** (1707-1783) che il concetto di funzione comincia a definirsi più compiutamente. La definizione data da Eulero all'inizio del suo trattato *Introductio in analysis infinitorum* (1748) è la seguente: «un'espressione analitica qualsiasi in cui siano coinvolte una quantità variabile e un numero qualsiasi di costanti».
Il concetto di funzione che emerge da questa definizione è ancora lontano da quello moderno: essa richiede infatti che una funzione sia descrivibile per mezzo di una singola *espressione analitica*. Solo più tardi Eulero darà, nelle *Institutiones calculi differentialis* (1755), una definizione più ampia e significativamente diversa: «se alcune quantità dipendono dalle altre in modo tale da subire delle variazioni quando queste ultime sono fatte variare, allora si dice che le prime sono funzioni delle seconde». A Eulero è anche dovuta la notazione $f(x)$ per indicare una funzione di x.


Eulero.

Dirichlet

Per arrivare a una buona definizione del concetto di funzione, occorre aspettare il diciannovesimo secolo. Il matematico tedesco **Dirichlet** (1085-1859) introduce una definizione di funzione simile alla seguente, che delinea ormai in modo chiaro il concetto di corrispondenza univoca: «una variabile y si dice *funzione* della variabile x in un certo intervallo quando esiste una legge che faccia corrispondere a ogni valore dato alla x uno e un solo valore di y».


Dirichlet.

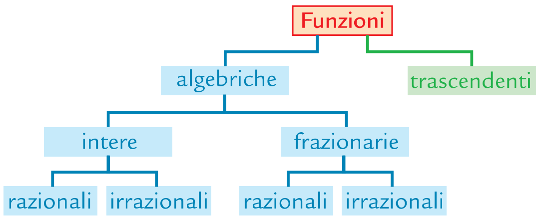
Bourbaki

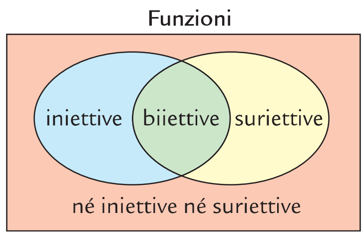
La moderna definizione di funzione, che usa il *linguaggio degli insiemi*, è riconducibile a un gruppo di matematici francesi che pubblicava nel 1939 sotto lo pseudonimo di **Nicolas Bourbaki**: «siano E ed F due insiemi, distinti oppure no; una relazione tra una variabile x di E e una variabile y di F è detta *funzione* se per ogni $x \in E$ esiste uno e un solo $y \in F$ che sia nella relazione data con x».

SINTESI

Formule e proprietà importanti

Classificazioni delle funzioni





Funzioni pari e dispari

f è pari $\Leftrightarrow$ $f(x) = f(-x)$ $\forall x \in$ dominio di f

f è dispari $\Leftrightarrow$ $f(-x) = -f(x)$ $\forall x \in$ dominio di f

Funzioni crescenti e decrescenti in un sottoinsieme *I* del dominio di una funzione *f*

f è crescente in senso stretto in I $\Leftrightarrow$ $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ $\forall x_1, x_2 \in I$

f è decrescente in senso stretto in I $\Leftrightarrow$ $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ $\forall x_1, x_2 \in I$

f è crescente in senso lato in I $\Leftrightarrow$ $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ $\forall x_1, x_2 \in I$

f è decrescente in senso lato in I $\Leftrightarrow$ $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ $\forall x_1, x_2 \in I$

Funzione composta $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

Funzione inversa $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

Il grafico di f^{-1} è il simmetrico del grafico di f rispetto alla bisettrice del primo e del terzo quadrante.

Procedimento per determinare l'equazione dell'inversa di una funzione (invertibile)

- Scambiare x con y nell'equazione $y = f(x)$ che definisce la funzione.
- Risolvere l'equazione ottenuta rispetto a y.

CONOSCENZE E ABILITÀ

1. Introduzione alle funzioni

TEORIA a p. 66

Definizione di funzione

1 **Vero o falso?**

a. ogni relazione è una funzione V F

b. ogni funzione è una relazione V F

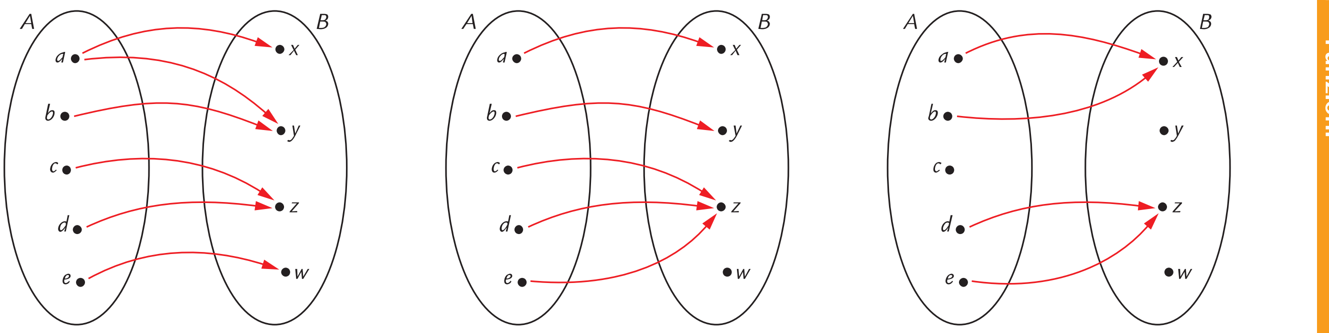
c. se f è una funzione di dominio A e codominio B, allora ogni elemento di A non può avere più di un'immagine in B V F

d. se f è una funzione di dominio A e codominio B, allora non possono esserci due elementi di A che hanno la stessa immagine in B V F

e. se f è una funzione di dominio A e codominio B, allora non possono esserci elementi di A che non hanno immagini in B V F

[3 affermazioni vere e 2 false]

2 Stabilisci se le relazioni rappresentate dai seguenti diagrammi a frecce rappresentano *funzioni* da A a B, giustificando la risposta.



3 Stabilisci quali delle seguenti relazioni definiscono delle *funzioni*, giustificando la risposta.

a. La relazione che associa a ogni studente della tua scuola i suoi insegnanti.
b. La relazione che associa a ogni cittadino italiano le auto che possiede.
c. La relazione che associa a ogni studente della tua scuola la propria madre.
d. La relazione che associa a ogni regione d'Italia le sue province.
e. La relazione che associa a ogni cittadino italiano il suo comune di nascita.

4 La formula $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \geq 1 \\ 5-x & \text{se } x \leq 1 \end{cases}$ **non** definisce una funzione $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Chiarisci questa affermazione.

5 La formula $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \geq 1 \\ 3-x & \text{se } x \leq 1 \end{cases}$ definisce una funzione $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$?

6 Spiega perché la formula $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$ **non** definisce una funzione $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. La medesima formula definisce una funzione $f\colon \mathbf{R} - \{-2\} \to \mathbf{R}$?

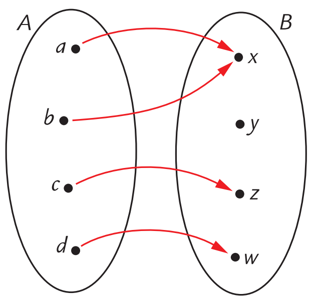
7 La formula $f(n) = \dfrac{n}{2}$ definisce una funzione $f\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$?

8 La formula $f(x) = \dfrac{x}{x+4}$ definisce una funzione $f\colon \mathbf{N} \to \mathbf{Q}$? Definisce una funzione $f\colon \mathbf{N} \to \mathbf{Z}$? Definisce una funzione $f\colon \mathbf{Z} \to \mathbf{Q}$?

Immagini e controimmagini

9 Facendo riferimento alla funzione rappresentata nella figura, completa le seguenti affermazioni:

a. Il dominio della funzione è l'insieme ....
b. Il codominio della funzione è l'insieme ....
c. L'immagine della funzione è l'insieme ....
d. Le controimmagini di x sono ....
e. L'immagine di c è ....



Per ciascuna delle seguenti funzioni, determina il valore indicato a fianco.

10 $f(x) = x^2 - 3x - 1$ $\quad f(-3)$ $\quad [17]$

11 $f(x) = x^4 - x^2 - 1$ $\quad f(-\sqrt{2})$ $\quad [1]$

12 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ $\quad f(101)$ $\quad \left[\dfrac{1}{10}\right]$

13 $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$ $\quad f\left(-\dfrac{3}{2}\right)$ $\quad [-1]$

14 $f(x) = \dfrac{x - \sqrt{x+1}}{x + \sqrt{x+1}}$ $\quad f(1)$ $\quad [2\sqrt{2} - 3]$

15 $f(x) = x^{-\frac{1}{2}} - x^{-\frac{2}{3}}$ $\quad f(64)$ $\quad \left[\dfrac{1}{16}\right]$

16 Considera la funzione così definita:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x^2+2} & \text{se } x \leq 2 \\ \sqrt{x^2+x+1} & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Determina $f(-\sqrt{2}), f(0), f(\sqrt{2}), f(2), f(3)$.

$\left[f(-\sqrt{2}) = \dfrac{1}{2},\ f(0) = 0,\ f(\sqrt{2}) = \dfrac{1}{2},\ f(2) = \dfrac{2}{3},\ f(3) = \sqrt{13}\right]$

17 Data la funzione $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$, scrivi l'espressione analitica di $f(2x)$, $2f(x)$, $f(x+1)$ e $f(x) + 1$.
$[8x^2 + 6x - 1;\ 4x^2 + 6x - 2;\ 2x^2 + 7x + 4;\ 2x^2 + 3x]$

18 Data la funzione $f(x) = \dfrac{x-2}{x+1}$, scrivi l'espressione analitica di $f(x+2)$, $f(x) + 2$, $f(2x)$, $2f(x)$.
$\left[\dfrac{x}{x+3};\ \dfrac{3x}{x+1};\ \dfrac{2x-2}{2x+1};\ \dfrac{2x-4}{x+1}\right]$

19 Data la funzione $f(x) = x^2 - 5$, quali sono le controimmagini di 20? $[-5 \text{ e } 5]$

20 Data la funzione $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$, qual è la controimmagine di 10? $\left[-\dfrac{99}{20}\right]$

21 Data la funzione $f(x) = x^2 - 2x$, quali sono le controimmagini di 6? $[1 \pm \sqrt{7}]$

22 Data la funzione $f(x) = \sqrt{x+8} - x$, qual è la controimmagine di 6? $[-4]$

23 Considera la funzione $f\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ definita da $f(x) = x^2 + x$. Qual è la controimmagine di 20? $[4]$

24 Determina, per ciascuna delle seguenti funzioni, le controimmagini di 6.

a. $f\colon \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}$ definita da $f(x) = x^2 - 2x$;

b. $f\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ definita da $f(x) = 2x^2 + x + 3$.

[**a.** Non ci sono controimmagini di 6; **b.** 1]

25 Considera la funzione $f\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ definita da $f(n) = n + 2$. Dopo aver calcolato $f(0)$; $f(1)$; $f(2)$; $f(3)$, stabilisci qual è l'insieme immagine della funzione.

26 Determina l'insieme immagine di ciascuna delle seguenti funzioni, dopo aver calcolato $f(0)$; $f(1)$; $f(2)$; $f(3)$:

a. $f\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ definita da $f(n) = 2n$;

b. $f\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ definita da $f(n) = 2n + 2$.

27 Date le due funzioni $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ e $g(x) = 2x$, risolvi la disequazione $2f(x+1) \geq 2g(x-1) - 3$.
$\left[x < -2 \vee -\dfrac{7}{4} \leq x \leq 2\right]$

28 Date le due funzioni $f(x) = 2x^2 - 1$ e $g(x) = 2x - 1$, risolvi la disequazione $f(2x-1) \geq g(x^2+1)$.
$\left[x \leq 0 \vee x \geq \dfrac{4}{3}\right]$

Classificazione e dominio di funzioni reali di variabile reale

Test

29 Quale delle seguenti funzioni **non** è razionale?

A $y = x^3 - x^{-2}$ B $y = \dfrac{x^3 - x}{x^2+1}$ C $y = x^2 - x^{\frac{1}{3}}$ D $y = \left(\dfrac{1}{x^2}\right)^3$

30 Quale delle seguenti funzioni è razionale frazionaria?

A $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x+1}}$ B $y = x^{-3} - x^2$ C $y = \sqrt{x^3 - x^2}$ D $y = x^{20} - x^2$

31 Quale delle seguenti funzioni è irrazionale intera?

A $y = \dfrac{1}{2}\sqrt{x} + \dfrac{1}{3}\sqrt[3]{x}$ B $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ C $y = \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{2}x^2$ D $y = x^{-\frac{1}{4}} + x^{-\frac{1}{3}}$

32 Quale delle seguenti funzioni **non** è irrazionale?

A $y = x^{-2} - x^{-1}$ B $y = \sqrt{x^2 - 2}$ C $y = x^{\frac{1}{2}} - x^3$ D $y = \sqrt[3]{x^2+1}$

33 Quale delle seguenti funzioni è trascendente?

A $y = 2^{x^2 - 2x}$ B $y = \sqrt{x^2 - 2x}$ C $y = \dfrac{1}{x^2 - 2x}$ D $y = (x^2 - 2x)^{-\frac{1}{3}}$

34 ESERCIZIO SVOLTO

Determiniamo il dominio delle seguenti funzioni.

a. $y = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{|x| - 1}$ **b.** $y = \sqrt{4x - x^2}$ **c.** $y = \dfrac{\sqrt{5-x} + \sqrt{x^2-4}}{x^2 + x + 1}$

---

a. Poiché una radice cubica è sempre definita, l'unica condizione da imporre è che il denominatore sia diverso da zero:

$|x| - 1 \neq 0 \Rightarrow |x| \neq 1 \Rightarrow x \neq \pm 1$

Pertanto il dominio della funzione è $\mathbf{R} - \{\pm 1\}$.

b. Una radice quadrata è definita purché il radicando sia maggiore o uguale a zero. Dobbiamo quindi imporre la condizione:

$$4x - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 4x \leq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 4$$ Risolvendo la disequazione di 2° grado

Pertanto il dominio della funzione è l'intervallo $[0, 4]$.

c. Dobbiamo imporre che i radicandi delle radici quadrate siano maggiori o uguali a zero e che il denominatore sia diverso da zero:

$$\begin{cases} 5 - x \geq 0 \\ x^2 - 4 \geq 0 \\ x^2 + x + 1 \neq 0 \end{cases}$$

Osserviamo che la terza condizione, $x^2 + x + 1 \neq 0$, è sempre verificata, poiché il discriminante del trinomio $x^2 + x + 1$ è negativo e il trinomio non si annulla mai. Resta allora da risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 5 - x \geq 0 \\ x^2 - 4 \geq 0 \end{cases}$$

che fornisce come soluzione:

$$x \leq -2 \vee 2 \leq x \leq 5$$

Pertanto il dominio della funzione è l'insieme $(-\infty, -2] \cup [2, 5]$.

Determina il dominio delle seguenti funzioni.

35 $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ $[\mathbb{R} - \{-1, 1\}]$

36 $y = \sqrt{2x + 1}$ $\left[x \geq -\dfrac{1}{2}\right]$

37 $y = 1 - \dfrac{1}{x}$ $[\mathbb{R} - \{0\}]$

38 $y = 2 - \sqrt{x + 3}$ $[x \geq -3]$

39 $y = \dfrac{x^4 - 1}{x^2 + 5x - 6}$ $[\mathbb{R} - \{-6, 1\}]$

40 $y = \dfrac{1}{3x^2 - 2x - 1}$ $\left[\mathbb{R} - \left\{-\dfrac{1}{3}, 1\right\}\right]$

41 $y = \dfrac{1}{5 - x^2} + \dfrac{1}{x^2 - 6x + 9}$ $[\mathbb{R} - \{\pm\sqrt{5}, 3\}]$

42 $y = \sqrt{\dfrac{1}{8}x - x^4}$ $\left[0 \leq x \leq \dfrac{1}{2}\right]$

43 $y = \dfrac{\sqrt{3x - x^2}}{x}$ $[0 < x \leq 3]$

44 $y = \dfrac{1}{\sqrt{2x - 3}} + \dfrac{x}{\sqrt{10 - 2x}}$ $\left[\dfrac{3}{2} < x < 5\right]$

45 $y = \dfrac{1}{x^4 - 6x^2 + 5}$ $[\mathbb{R} - \{\pm 1, \pm\sqrt{5}\}]$

46 $y = \sqrt{10x - x^2} + \sqrt{x^2 - 9}$ $[3 \leq x \leq 10]$

47 $y = \dfrac{\sqrt{x^6 - 7x^3 + 6}}{|x| + 3}$ $[x \leq 1 \vee x \geq \sqrt[3]{6}]$

48 $y = \dfrac{1 - \sqrt{25 - x^2}}{\sqrt{x + 3} - 1}$ $[-3 \leq x < -2 \vee -2 < x \leq 5]$

49 $y = \sqrt{\dfrac{x^3 - 1}{4x^2 - 3x - 7}}$ $\left[-1 < x \leq 1 \vee x > \dfrac{7}{4}\right]$

50 $y = \sqrt{x} + \sqrt{3 - x}$ $[0 \leq x \leq 3]$

51 $y = -3\sqrt{2 - 2x^2}$ $[-1 \leq x \leq 1]$

52 $y = \dfrac{x}{x^2 - 4x + 3}$ $[\mathbb{R} - \{1, 3\}]$

53 $y = \sqrt[3]{x} + \dfrac{x}{\sqrt{x} - 1}$ $[0 \leq x < 1 \vee x > 1]$

54 $y = \sqrt{\dfrac{9 - x^2}{2x + 1}} + \sqrt[3]{\dfrac{x - 1}{x^2 + 2}}$ $\left[x \leq -3 \vee -\dfrac{1}{2} < x \leq 3\right]$

55 $y = \dfrac{x^4 - 1}{\sqrt{-2x^2 + x + 1}}$ $\left[-\dfrac{1}{2} < x < 1\right]$

56 $y = \dfrac{x}{x^2 - x + 2} + \dfrac{1}{x}$ $[\mathbb{R} - \{0\}]$

57 $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 2x}}$ $[x < 0 \vee x > 2]$

58 $y = \sqrt{x} - \sqrt{4 - x}$ $[0 \leq x \leq 4]$

59 $y = \sqrt{3 - 2x - x^2}$ $[-3 \leq x \leq 1]$

60 $y = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{2 - x^2}$ $[\mathbb{R} - \{\pm\sqrt{2}\}]$

61 $y = \sqrt{\dfrac{1}{2}x^2 - 0{,}5}$ $[x \leq -1 \vee x \geq 1]$

62 $y = \dfrac{1}{x^3 + 2x^2 - 2x - 4}$ $[\mathbb{R} - \{-2, \pm\sqrt{2}\}]$

63 $y = \dfrac{\sqrt{x - 1}}{x^2 + 4x - 12}$ $[x \geq 1 \wedge x \neq 2]$

64 $y = \dfrac{3x^2 - 1}{2x^2 - 3x + 2}$ $[\mathbb{R}]$

65 $y = \dfrac{3x^2 - 1}{2x^2 - 3x + 1}$ $\left[\mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{2}, 1\right\}\right]$

66 $y = \dfrac{\sqrt[3]{3x^2 - 1}}{4x^2 + 4x + 1}$ $\left[\mathbb{R} - \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}\right]$

67 $y = \dfrac{x + \sqrt{x}}{x - \sqrt{2x + 1}}$ $[x \geq 0 \wedge x \neq 1 + \sqrt{2}]$

68 $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 3x}{16 - x^2}}$ $[-4 < x \leq 0 \vee 3 \leq x < 4]$

69 $y = \sqrt{|x + 4|} + \sqrt{x^2 + 7x + 10}$ $[x \leq -5 \vee x \geq -2]$

70 $y = \dfrac{1}{x^4 + x^2}$ $[\mathbb{R} - \{0\}]$

71 $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3 - \sqrt{x}}}$ $[x \geq 0 \wedge x \neq 9]$

72 $y = (x^2 - 2x)^{-\frac{1}{2}}$ $[x < 0 \vee x > 2]$

73 $y = \sqrt{x + 1} + \sqrt{2x^2}$ $[x \geq -1]$

74 $y = \dfrac{x}{|x| - 2}$ $[\mathbb{R} - \{\pm 2\}]$

75 $y = \sqrt{x^2 - 4} - x^{-5}$ $[x \leq -2 \vee x \geq 2]$

76 $y = \sqrt{(x - 1)^2 - 9} + 1$ $[x \leq -2 \vee \ x \geq 4]$

77 $y = \sqrt{-x^2 + x - \dfrac{1}{4}}$ $\left[\left\{\dfrac{1}{2}\right\}\right]$

78 $y = \sqrt{\dfrac{x}{x^2 - 1}}$ $[-1 < x \leq 0 \ \vee \ x > 1]$

79 $y = \dfrac{1}{x} + \sqrt{4 - x^2}$ $[-2 \leq x < 0 \vee 0 < x \leq 2]$

80 $y = \dfrac{x^2 - \sqrt{x + 3}}{x + 2}$ $[-3 \leq x < -2 \vee x > -2]$

81 $y = \sqrt{x^3 - x}$ $[-1 \leq x \leq 0 \vee \ x \geq 1]$

82 $y = \sqrt{x^2 - x + 1}$ $[\mathbb{R}]$

83 $y = \dfrac{x}{|x + 3| - 4}$ $[\mathbb{R} - \{-7, 1\}]$

84 $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - x^4}}$ $[-1 < x < 1 \wedge x \neq 0]$

85 $y = \sqrt{|x^2 - 14| - 2}$
$[x \leq -4 \vee -2\sqrt{3} \leq x \leq 2\sqrt{3} \vee x \geq 4]$

86 $y = \dfrac{x}{\sqrt{5 - x} + \sqrt{x + 2}}$ $[-2 \leq x \leq 5]$

87 $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}$ $[\mathbb{R} - \{\pm 1\}]$

88 $y = \dfrac{x^2 + 1}{|x^2 - 1| + 1}$ $[\mathbb{R}]$

89 $y = \sqrt{x^2 - 9} + \sqrt{10 - |x|}$
$[-10 \leq x \leq -3 \vee 3 \leq x \leq 10]$

90 $y = (2x^2 - x - 1)^{\frac{1}{2}} + (x^2 - 2x)^{-\frac{1}{4}}$
$\left[x \leq -\dfrac{1}{2} \vee x > 2\right]$

91 $y = \dfrac{x^3 + 1}{\sqrt{x + \sqrt{x}}}$ $[x > 0]$

92 $y = \sqrt{x - 1 - \sqrt{x^2 - 3}}$ $[\sqrt{3} \leq x \leq 2]$

93 $y = \dfrac{\sqrt{|x - 1| - |2x - 1|}}{|x - 1| + |2x - 1|}$ $\left[0 \leq x \leq \dfrac{2}{3}\right]$

94 $y = \dfrac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{2x + \sqrt{x^2 + 1}}$ $\left[\mathbb{R} - \left\{-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right\}\right]$

95 $y = \sqrt{2 - \sqrt{x}}$ $[0 \leq x \leq 4]$

96 $y = \sqrt{\sqrt{x + 3} - 2x}$ $[-3 \leq x \leq 1]$

97 $y = \sqrt{2 - \sqrt[3]{x + 3}}$ $[x \leq 5]$

98 $y = \dfrac{x}{|x - 2| - 2x}$ $\left[\mathbb{R} - \left\{\dfrac{2}{3}\right\}\right]$

99 $y = \sqrt{|x^2 - 8| - 1}$
$[x \leq -3 \vee \ -\sqrt{7} \leq x \leq \sqrt{7} \vee \ x \geq 3]$

100 $y = \dfrac{x}{x^3 - 3x^2 + 2}$ $[\mathbb{R} - \{1, 1 \pm \sqrt{3}\}]$

101 $y = \sqrt{|x + 4| - 1}$ $[x \leq -5 \ \vee \ x \geq -3]$

102 $y = \sqrt{x^4 - 9x}$ $[x \leq 0 \ \vee x \geq \sqrt[3]{9}]$

103 $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{|x| - |2x - 1|}}$ $\left[\mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{3}, 1\right\}\right]$

104 $y = \sqrt{2x - |x|}$ $[x \geq 0]$

105 $y = \sqrt{1 - \sqrt{x - \sqrt{x}}}$ $\left[x = 0 \vee 1 \leq x \leq \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}\right]$

106 Determina per quali valori di k la funzione $y = \dfrac{1}{kx^2 - 3x - 1}$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$. $\left[k < -\dfrac{9}{4}\right]$

107 Determina per quali valori di k la funzione $y = \dfrac{1}{kx - 1}$ ha come dominio $\mathbb{R} - \{2\}$. $\left[k = \dfrac{1}{2}\right]$

108 Determina per quali valori di k la funzione $y = \sqrt{-x^2 + kx - 3}$ è definita in corrispondenza di uno e un solo valore reale di x. $[k = \pm 2\sqrt{3}]$

109 Determina per quali valori di k la funzione $y = \sqrt{x - 2} + \sqrt{k^2 - x^2}$ non è definita in corrispondenza di alcun valore reale di x. $[-2 < k < 2]$

Immagine di una funzione reale di variabile reale

110 ESERCIZIO SVOLTO

Determiniamo l'immagine della funzione definita da $y = x^2 + 2x$.

- L'immagine della funzione è l'insieme dei valori di y che hanno almeno una controimmagine in **R**. Quindi l'immagine della funzione è costituita dai valori di y per cui la seguente equazione nell'incognita x ha almeno una soluzione reale:

  $x^2 + 2x = y$
- Questa equazione, equivalente a $x^2 + 2x - y = 0$, ha almeno una soluzione reale se e solo se il suo discriminante è maggiore o uguale a 0, ossia se e solo se è verificata la disequazione:

  $4 + 4y \geq 0$ da cui $y \geq -1$
- Concludiamo che l'immagine della funzione è l'intervallo $[-1, +\infty)$.

Determina l'immagine di ciascuna delle seguenti funzioni.

111 $y = 2x - 1$ $[\mathbf{R}]$

112 $y = x^2 - 4x + 1$ $[y \geq -3]$

113 $y = \dfrac{2x}{x-1}$ $[\mathbf{R} - \{2\}]$

114 $y = \dfrac{x}{x^2+1}$ $\left[-\dfrac{1}{2} \leq y \leq \dfrac{1}{2}\right]$

115 $y = \sqrt{x^2+1} - x$ $[y > 0]$

116 $y = \sqrt{x^2+1}$ $[y \geq 1]$

117 $y = x^4 - 4x^2$ (*Suggerimento*: affinché l'equazione (nell'incognita x) $x^4 - 4x^2 - y = 0$ abbia soluzioni reali, l'equazione di secondo grado $t^2 - 4t - y = 0$ (ottenuta ponendo $x^2 = t$) deve avere soluzioni reali di cui almeno una non negativa) $[y \geq -4]$

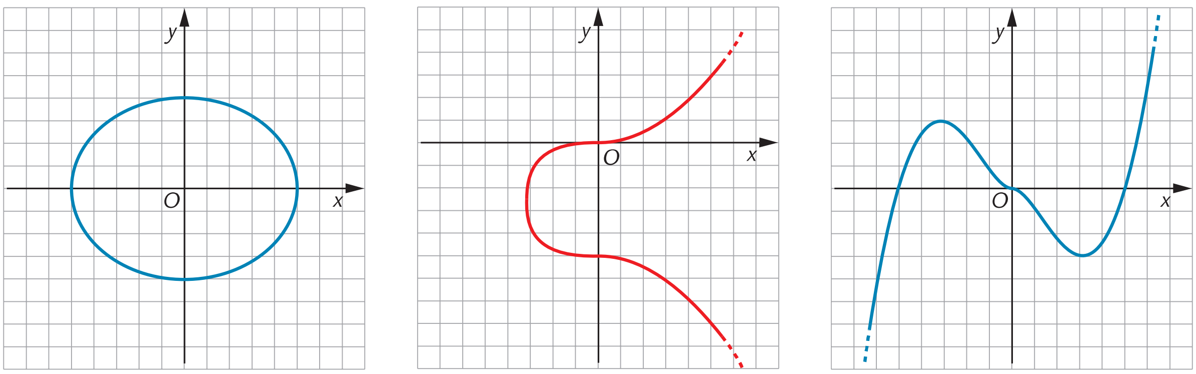
118 $y = \dfrac{x^4}{x^2+2}$ (*Vedi* il suggerimento dell'esercizio precedente) $[y \geq 0]$

Il grafico di una funzione

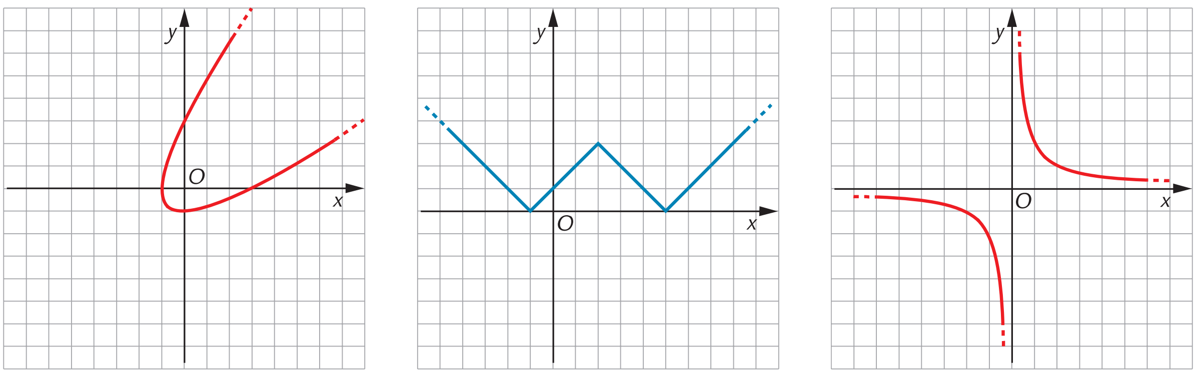
Nota Nelle figure relative ai seguenti esercizi sono riportati i grafici di diverse funzioni: il tratteggio agli estremi del grafico indica che esso prosegue indefinitamente; il punto pieno che il punto appartiene al grafico della funzione e il punto vuoto che non vi appartiene; in tutti i grafici si intende che l'unità di misura coincide con il lato dei quadratini della quadrettatura.

Stabilisci se le seguenti curve sono grafici di funzioni.

119

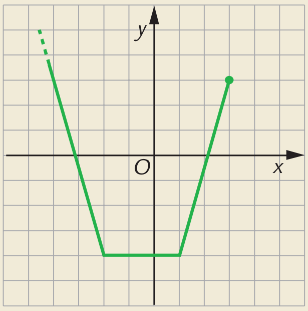


120

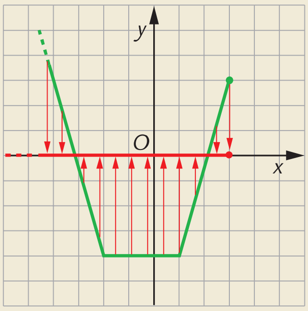


121 ESERCIZIO SVOLTO

Individuiamo dominio e immagine della funzione che ha il grafico mostrato qui di seguito.



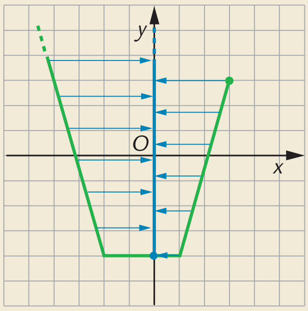
Il dominio è l'insieme dei valori assunti dalle ascisse dei punti che appartengono al grafico della funzione: geometricamente, per individuare il dominio possiamo immaginare di proiettare tutti i punti del grafico sull'asse x.



Proiettando sull'asse x, otteniamo la semiretta colorata in rosso, compresa l'origine della semiretta, che ha coordinate (3, 0). Perciò il dominio della funzione è l'insieme:

$D = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leq 3\}$ ovvero l'intervallo $(-\infty, 3]$

L'immagine è l'insieme dei valori assunti dalle ordinate dei punti che appartengono al grafico della funzione. Geometricamente, per individuare l'immagine possiamo immaginare di proiettare tutti i punti del grafico sull'asse y.

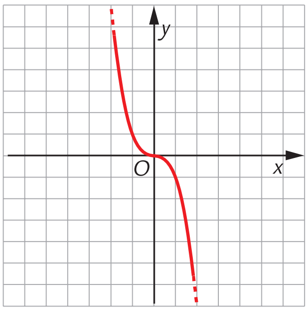


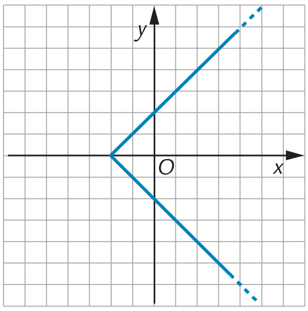
Proiettando sull'asse y, otteniamo la semiretta colorata in blu, compresa l'origine della semiretta, che ha coordinate (0, −4). Perciò l'immagine della funzione è l'insieme:

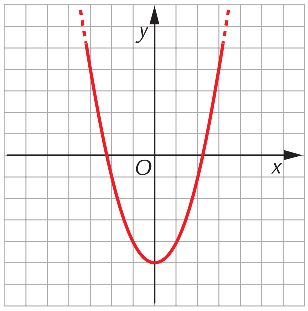
$I = \{y \in \mathbf{R} \mid y \geq -4\}$ ovvero l'intervallo $[-4, +\infty)$

Stabilisci se le seguenti curve sono grafici di funzioni e, in caso affermativo, determina il dominio e l'immagine.

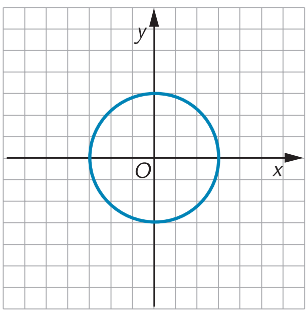
122

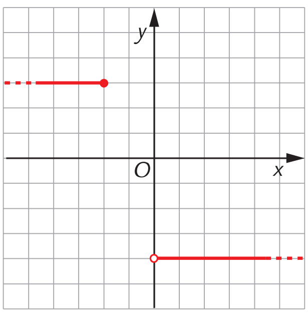


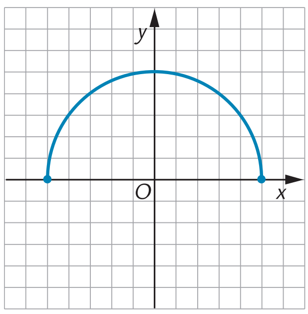




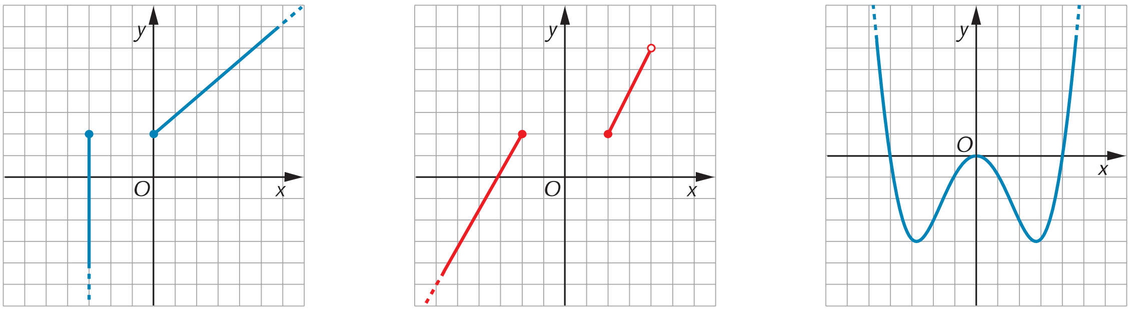
123



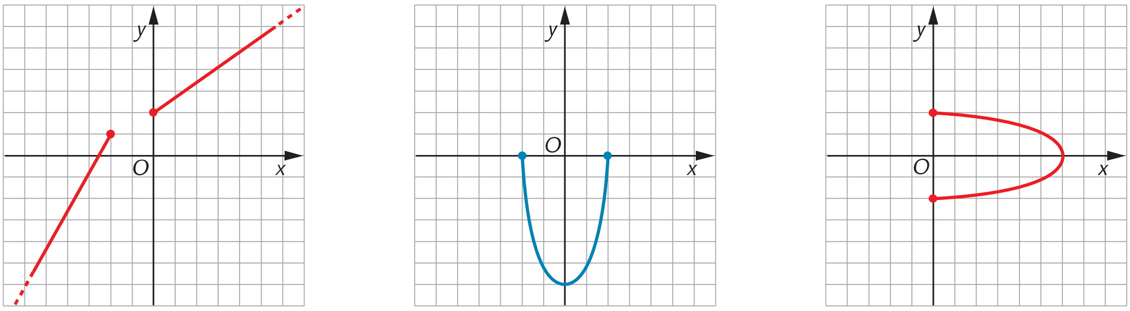




124



125



126 ESERCIZIO GUIDATO

Traccia approssimativamente il grafico della funzione $y = -\frac{1}{2}x + 1$.

Devi anzitutto costruire una tabella, per determinare le coordinate di alcuni punti appartenenti al grafico della funzione. Completa, per esempio, la tabella riportata qui a destra: nota che abbiamo scelto di attribuire a x valori **pari**, in modo da ottenere per y valori **non** frazionari e quindi punti più facili da rappresentare.
Rappresenta nel piano cartesiano i punti le cui coordinate hanno i valori di x e y della tabella e congiungili con una linea continua: otterrai come grafico una *retta*.

x	y
-4	.....
-2	.....
0	.....
2	.....
	.....

Traccia approssimativamente il grafico di ciascuna delle seguenti funzioni.

127 $y = 2x - 2$

128 $y = \frac{1}{2}x + 1$

129 $y = -x^2$

130 $y = -\frac{6}{x}$

131 $y = \frac{3}{2}x - 3$

132 $y = x^2 - 4$

133 $y = x^3$

134 $y = -\frac{1}{2}x^2$

135 $y = -\frac{3}{2}x + 2$

136 $y = 3x - 4$

137 $y = \frac{1}{2}x^3$

138 $y = -4x + 3$

139 $y = -\frac{2}{3}x + 1$

140 $y = 2\sqrt{x}$

141 $y = x^2 - 4x$

142 $y = \frac{8}{x}$

143 $y = -\frac{1}{4}x^3$

144 $y = 3 - x^2$

145 $y = \frac{1}{2}x^3$

146 $y = -2x + 3$

147 $y = \sqrt{x^2 + 1}$

148 $y = -2x^2 + 3$

149 $y = -\frac{1}{2}x^2$

150 $y = \sqrt[3]{x}$

151 ESERCIZIO SVOLTO

Determiniamo k in modo che il grafico della funzione $y = x^3 - kx^2 + k - 1$ passi per il punto $P(-2, -1)$.

Dobbiamo imporre che l'equazione che definisce la funzione sia soddisfatta in corrispondenza delle coordinate di $P(-2, -1)$. Sostituiamo perciò -2 al posto di x e -1 al posto di y nell'equazione della funzione e risolviamo l'equazione nell'incognita k che otteniamo:

$$-1 = (-2)^3 - k(-2)^2 + k - 1 \Rightarrow -1 = -8 - 4k + k - 1 \Rightarrow -3k = 8 \Rightarrow k = -\frac{8}{3}$$

152 Determina k in modo che il grafico della funzione $y = kx^2 - x + k - 1$ passi per il punto di coordinate $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$. $\left[k = \frac{2}{5}\right]$

153 Determina b e c in modo che il grafico della funzione $y = x^2 + bx + c$ passi per l'origine e per il punto di coordinate $(-1, 2)$. $[b = -1, c = 0]$

154 Determina b e c in modo che il grafico della funzione $y = x^2 + bx + c$ passi per i punti di coordinate $(0, 2)$ e $(4, 0)$. $\left[b = -\frac{9}{2}, c = 2\right]$

Uguaglianza di funzioni

Stabilisci se le seguenti coppie di funzioni sono uguali.

155 $y = \dfrac{x^6 - 1}{x^3 - 1}$ e $y = x^3 + 1$

156 $y = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$ e $y = x^2 + x + 1$

157 $y = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 + x + 1}$ e $y = x - 1$

158 $y = \dfrac{x^3 + 1}{x^2 + x + 1}$ e $y = x + 1$

159 $y = \dfrac{\sqrt{x - 2}}{\sqrt{x + 3}}$ e $y = \sqrt{\dfrac{x - 2}{x + 3}}$

160 $y = \dfrac{1}{\sqrt{x + 1} + \sqrt{x}}$ e $y = \sqrt{x + 1} - \sqrt{x}$

161 $y = \dfrac{\sqrt[3]{x + 1}}{\sqrt[3]{x - 1}}$ e $y = \sqrt[3]{\dfrac{x + 1}{x - 1}}$

162 $y = |-x^2 + x - 1|$ e $y = x^2 - x + 1$

163 $y = \dfrac{|x - 1|}{x - 1}$ e $y = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 1 \\ -1 & \text{se } x < 1 \end{cases}$

Il dominio di funzioni che scaturiscono da problemi

164 **Noleggio di biciclette.** Un negozio noleggia biciclette applicando la seguente tariffa:

a. una quota fissa di 1 euro da versare al momento del noleggio;
b. una quota variabile in base alla durata del noleggio (2 euro all'ora) da versare al momento della restituzione della bicicletta.

Il negozio affitta le biciclette «a ore», cioè non è possibile, per esempio, noleggiare la bicicletta per un'ora e mezza o per due ore e un quarto. Esprimi il costo complessivo del noleggio in funzione del numero x di ore. Qual è il dominio della funzione che resta così definita, in relazione al problema?

[$C(x) = 1 + 2x$; il dominio della funzione, dal momento che il negozio affitta le biciclette «a ore», è l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali]

165 **Noleggio di auto.** Per il noleggio di un'automobile, una compagnia di noleggio applica una tariffa in base al numero di giorni:

a. 25 euro al giorno fino al settimo giorno;
b. 15 euro al giorno dall'ottavo giorno in poi.

La compagnia affitta le auto «a giorni», cioè non è possibile, per esempio, noleggiare l'auto per un giorno e mezzo. Esprimi il costo complessivo del noleggio in funzione del numero x di giorni. Qual è il dominio della funzione che resta così definita, in relazione al problema?

166 **Torneo.** In un torneo sportivo ogni squadra incontra esattamente una volta ciascuna delle altre squadre. Supponi che al torneo partecipino n squadre. Esprimi il numero di partite giocate complessivamente in funzione di n. Qual è il dominio della funzione che resta così definita, in relazione al problema?

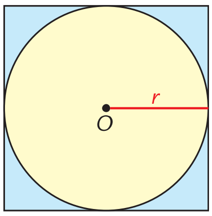
$\left[f(n)=\dfrac{n(n-1)}{2}\right.$; il dominio della funzione è l'insieme $\mathbf{N}$ dei numeri naturali$\left.\right]$

167 Indica con n il numero dei lati di un poligono. Esprimi in funzione di n il numero delle diagonali del poligono. Qual è il dominio della funzione che resta così definita, in relazione al problema?

168 Un cerchio il cui raggio misura r è inscritto in un quadrato.

a. Esprimi l'area del quadrato in funzione di r. Qual è il dominio della funzione che resta così definita, in relazione al problema geometrico?

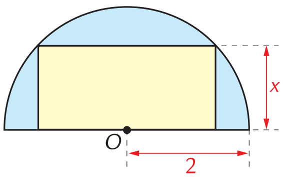
b. Esprimi il perimetro del quadrato come funzione di r. Qual è il dominio della funzione che resta così definita, in relazione al problema geometrico?



169 Un rettangolo non degenere, la cui altezza misura x, è inscritto in un semicerchio il cui raggio misura 2.

a. Esprimi l'area del rettangolo in funzione di x. Qual è il dominio della funzione che resta così definita, in relazione al problema geometrico?

b. Esprimi il perimetro del rettangolo in funzione di x. Qual è il dominio della funzione che resta così definita, in relazione al problema geometrico?



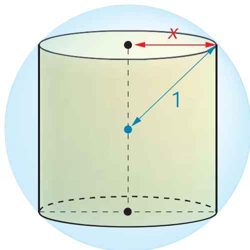
[**a.** $A(x)=2x\sqrt{4-x^2}$; **b.** $P(x)=4\sqrt{4-x^2}+2x$; il dominio di entrambe le funzioni è l'intervallo $0<x<2$]

170 Un triangolo acutangolo non degenere ABC, isoscele sulla base AB, è inscritto in una circonferenza di raggio 1. Esprimi, in funzione della misura $2x$ della base, l'area del triangolo. Qual è il dominio della funzione che resta così definita, in relazione al problema geometrico? [$A(x)=x(1+\sqrt{1-x^2})$, con $0<x<1$]

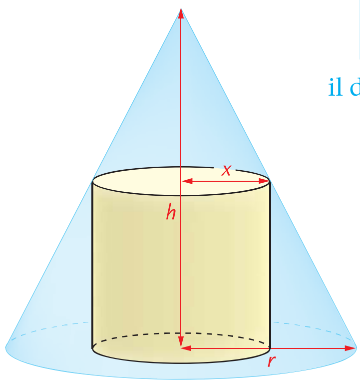
171 Un triangolo non degenere ABC, isoscele sulla base AB, è circoscritto a una semicirconferenza di raggio 1. Esprimi, in funzione della misura x dell'altezza relativa ad AB, il perimetro del triangolo. Qual è il dominio della funzione che resta così definita, in relazione al problema geometrico?

$\left[p(x)=\dfrac{2x^2+2x}{\sqrt{x^2-1}}\text{, con } x>1\right]$

172 Un cilindro non degenere, il cui raggio di base misura x, è inscritto in una sfera di raggio 1. Esprimi, in funzione di x, il volume del cilindro e stabilisci qual è il dominio della funzione che resta così definita, in relazione al problema geometrico.

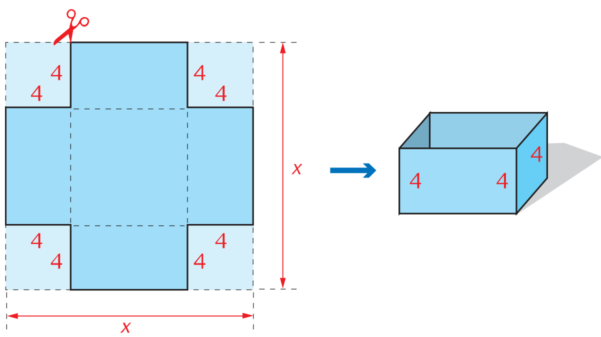


173 Un cilindro non degenere, il cui raggio di base misura x, è inscritto in un cono il cui raggio di base misura r e la cui altezza misura h. Esprimi, in funzione di x, il volume del cilindro e stabilisci qual è il dominio della funzione che resta così definita, in relazione al problema geometrico.



$\left[V(x)=\dfrac{\pi h}{r}x^2(r-x)\right.$; il dominio è l'intervallo $\left.0<x<r\right]$

174 Ai quattro angoli di un quadrato di cartone il cui lato misura x si ritagliano quattro quadrati il cui lato misura 4. Il cartone restante viene ripiegato in modo da formare una scatola, come indicato in figura. Esprimi in funzione di x il volume della scatola e stabilisci qual è il dominio della funzione che resta così definita, in relazione al problema geometrico.



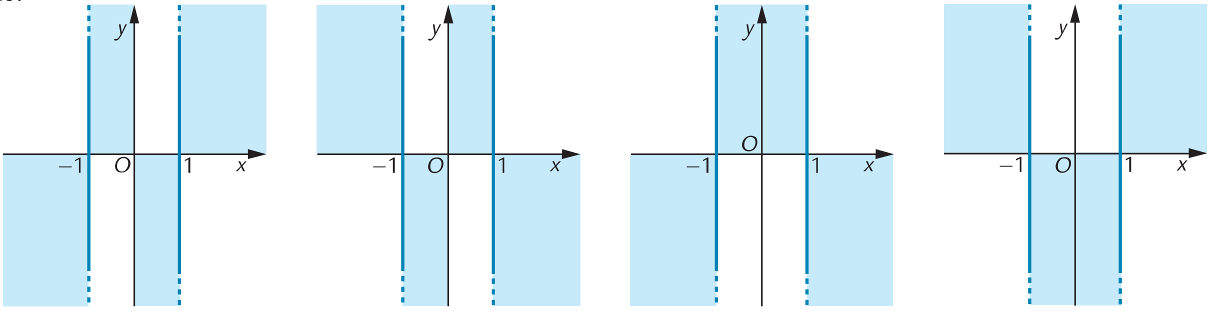
2. Prime proprietà delle funzioni reali di variabile reale

TEORIA a p. 73

Il segno di una funzione

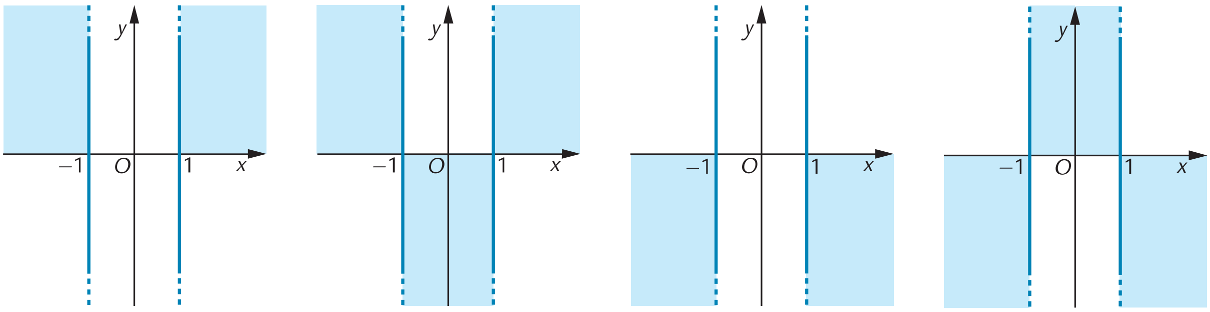
Test

175 Il grafico della funzione $y = x^3 - x$ appartiene alla parte di piano in colore di una sola delle seguenti figure; quale?



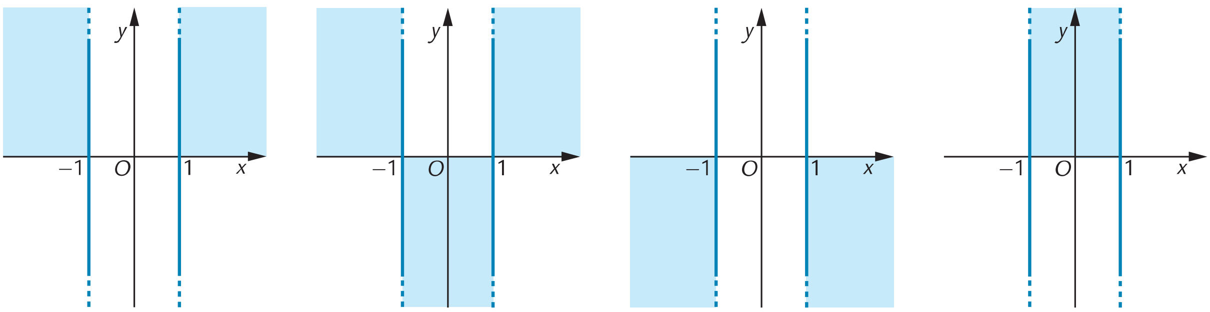
a b c d

176 Il grafico della funzione $y = x^4 - x^2$ appartiene alla parte di piano in colore di una sola delle seguenti figure; quale?



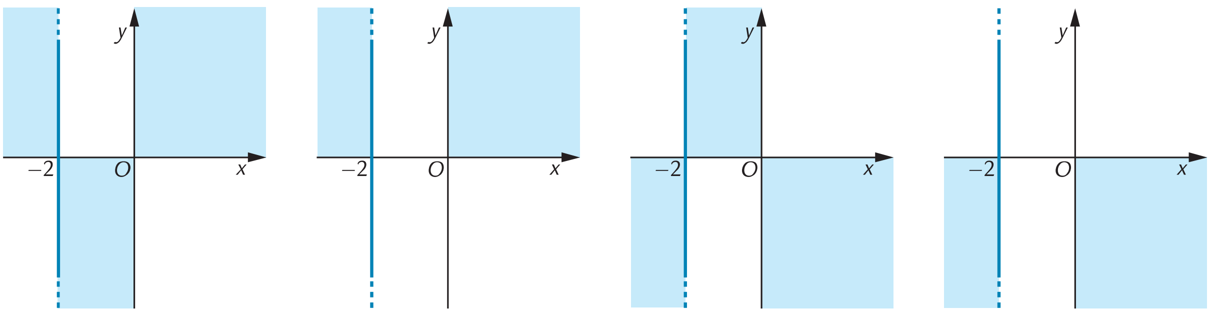
a b c d

177 Il grafico della funzione $y = \sqrt{x^2 - 1}$ appartiene alla parte di piano in colore di una sola delle seguenti figure; quale?



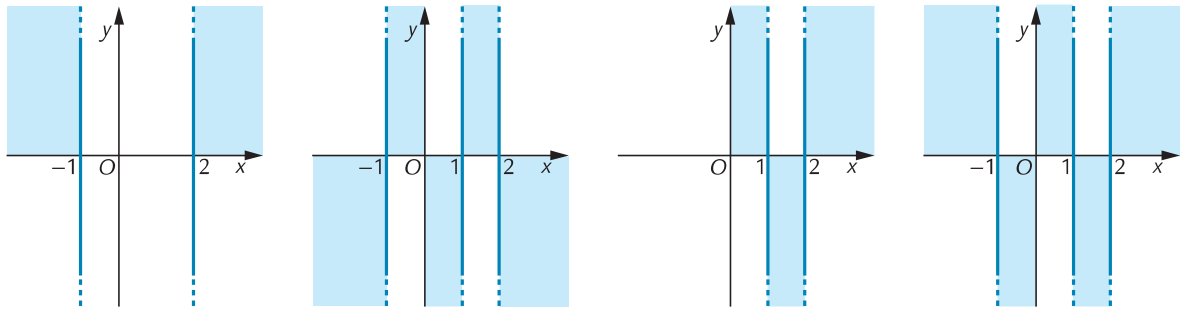
a b c d

178 Il grafico della funzione $y = \dfrac{|x+1| - 1}{\sqrt{2x^2 + 3}}$ appartiene alla parte di piano in colore di una sola delle seguenti figure; quale?



a b c d

179 Il grafico della funzione $y = \dfrac{x^2 - 2x}{|x| - 1}$ appartiene alla parte di piano in colore di una sola delle seguenti figure; quale?



a **b** **c** **d**

Studia il segno di ciascuna delle seguenti funzioni, dopo averne determinato il dominio, e indica la parte del piano alla quale appartiene il suo grafico.

180 $y = x^5 - x^3$ $\quad [D = \mathbf{R};\ y > 0 \text{ per } -1 < x < 0 \vee x > 1;\ y = 0 \text{ per } x = 0 \vee x = \pm 1;\ y < 0 \text{ per } x < -1 \vee 0 < x < 1]$

181 $y = x^3 + 10x^2 - 11x$ $\quad [D = \mathbf{R};\ y > 0 \text{ per } -11 < x < 0 \vee x > 1;\ y = 0 \text{ per } x = -11 \vee x = 0 \vee x = 1;\ y < 0 \text{ per } x < -11 \vee 0 < x < 1]$

182 $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$ $\quad [D = \mathbf{R} - \{\pm 1\};\ y > 0 \text{ per } x < -1 \vee x > 1;\ y = 0 \text{ per } x = 0;\ y < 0 \text{ per } -1 < x < 1]$

183 $y = \dfrac{x^3 + x^2}{2x^2 + x - 3}$ $\quad \left[D = \mathbf{R} - \left\{-\dfrac{3}{2},\ 1\right\};\ y > 0 \text{ per } -\dfrac{3}{2} < x < -1 \vee x > 1;\ y = 0 \text{ per } x = -1 \vee x = 0;\ y < 0 \text{ per } x < -\dfrac{3}{2} \vee -1 < x < 0 \vee 0 < x < 1\right]$

184 $y = x|x| - 2x - 1$ $\quad [D = \mathbf{R};\ y > 0 \text{ per } x > 1 + \sqrt{2};\ y = 0 \text{ per } x = -1 \vee x = 1 + \sqrt{2};\ y < 0 \text{ per } x < 1 + \sqrt{2} \wedge x \neq -1]$

185 $y = |2x^2 - 8x|$ $\quad [D = \mathbf{R};\ y > 0 \text{ per } x \in \mathbf{R} - \{0,\ 4\};\ y = 0 \text{ per } x = 0 \vee x = 4;\ y < 0 \text{ per nessuna } x \in D]$

186 $y = \sqrt{x^2 + 2x} - x - 3$ $\quad \left[D = (-\infty, -2] \cup [0, +\infty);\ y > 0 \text{ per } x < -\dfrac{9}{4};\ y = 0 \text{ per } x = -\dfrac{9}{4};\ y < 0 \text{ per } -\dfrac{9}{4} < x \leq -2 \vee x \geq 0\right]$

187 $y = \sqrt[3]{x^3 - x}$ $\quad [D = \mathbf{R};\ y > 0 \text{ per } -1 < x < 0 \vee x > 1;\ y = 0 \text{ per } x = 0 \vee x = \pm 1;\ y < 0 \text{ per } x < -1 \vee 0 < x < 1]$

188 $y = \sqrt{-x^2 + 7x - 6}$ $\quad [D = [1,\ 6];\ y > 0 \text{ per } 1 < x < 6;\ y = 0 \text{ per } x = 1 \vee x = 6;\ y < 0 \text{ per nessun } x \in D]$

189 $y = \dfrac{\sqrt{x}}{5 - x}$ $\quad [D = [0,\ 5) \cup (5,\ +\infty);\ y > 0 \text{ per } 0 \leq x < 5;\ y = 0 \text{ per } x = 0;\ y < 0 \text{ per } x > 5]$

190 $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{x + 2}$ $\quad [D = (-\infty, -2) \cup (-2, -1] \cup [1, +\infty);\ y > 0 \text{ per } -2 < x < -1 \vee x > 1;\ y = 0 \text{ per } x = \pm 1;\ y < 0 \text{ per } x < -2]$

191 $y = \dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{10 - x}}{x^2 - 9}$ $\quad [D = [0, 3) \cup (3, 10];\ y > 0 \text{ per } 3 < x \leq 10;\ y = 0 \text{ per nessuna } x \in D;\ y < 0 \text{ per } 0 \leq x < 3]$

192 $y = \dfrac{x^3 - 1}{|x| + |x - 1|}$ $\quad [D = \mathbf{R};\ y > 0 \text{ per } x > 1;\ y = 0 \text{ per } x = 1;\ y < 0 \text{ per } x < 1]$

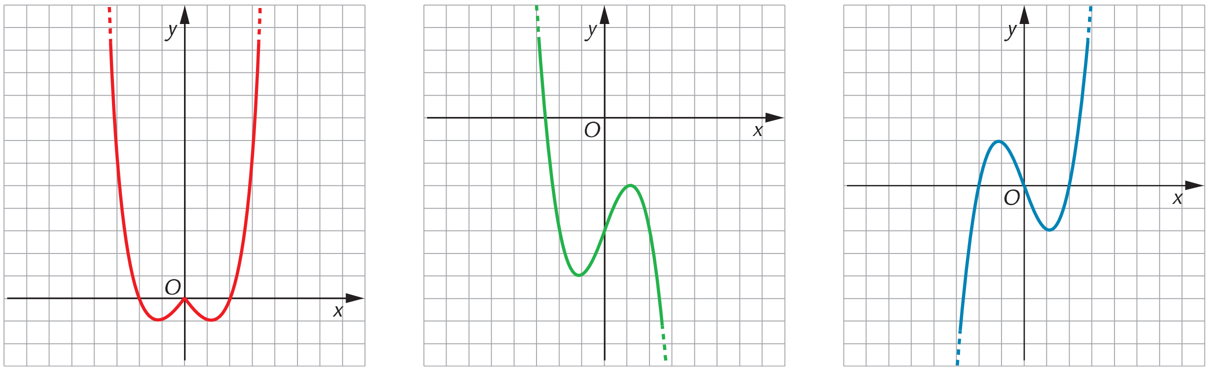
193 $y = \dfrac{\sqrt{|x| + 1} - 2}{\sqrt{4x^2 + 4x + 1}}$ $\quad \left[D = \mathbf{R} - \left\{-\dfrac{1}{2}\right\};\ y > 0 \text{ per } x < -3 \vee x > 3;\ y = 0 \text{ per } x = \pm 3;\ y < 0 \text{ per } -3 < x < 3 \wedge x \neq -\dfrac{1}{2}\right]$

194 $y = \dfrac{|x| - 1}{|x| - |x - 1|}$ $\quad \left[D = \mathbf{R} - \left\{\dfrac{1}{2}\right\};\ y > 0 \text{ per } -1 < x < \dfrac{1}{2} \vee x > 1;\ y = 0 \text{ per } x = \pm 1;\ y < 0 \text{ per } x < -1 \vee \dfrac{1}{2} < x < 1\right]$

195 $y = \sqrt[3]{|x + 1| - \sqrt{2x^2 - x - 1}}$ $\quad \left[D = \left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right] \cup [1, +\infty);\ y > 0 \text{ per } \dfrac{3 - \sqrt{17}}{2} < x \leq -\dfrac{1}{2} \vee 1 \leq x < \dfrac{3 + \sqrt{17}}{2};\ y = 0 \text{ per } x = \dfrac{3 \pm \sqrt{17}}{2};\ y < 0 \text{ per } x < \dfrac{3 - \sqrt{17}}{2} \vee x > \dfrac{3 + \sqrt{17}}{2}\right]$

Funzioni pari e funzioni dispari

196 **Dal grafico alle sue proprietà.** Stabilisci se le funzioni aventi i seguenti grafici sono pari o dispari.



Stabilisci se le seguenti funzioni di cui è data l'equazione sono pari o dispari.

197 $y = 3x^5$

198 $y = 3x^6 - 2x^4$

199 $y = -2x^2 - 3$

200 $y = 3x^3 + 4$

201 $y = \dfrac{1}{4}\sqrt[3]{x}$

202 $y = x - |x|$

203 $y = \sqrt[3]{2 - x^2}$

204 $y = \dfrac{2x}{x^4 - 1}$

205 $y = \dfrac{3x^3}{|x| + 1}$

206 $y = \sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 + x + 1}$

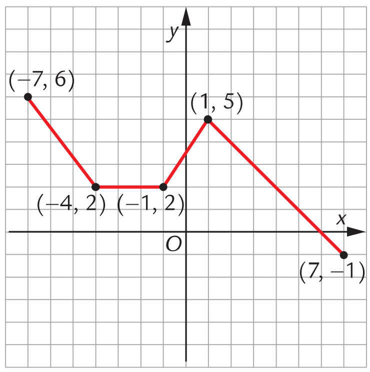
207 $y = |x| - 3x^2$

208 $y = 3x|x|$

209 $y = |x - 1| + |x + 1|$

Funzioni crescenti e funzioni decrescenti

210 In riferimento al grafico qui a fianco, stabilisci se le seguenti affermazioni sono vere o false.



a. la funzione è strettamente crescente nell'intervallo $[-7, -4]$ V F

b. la funzione è costante nell'intervallo $[-4, -1]$ V F

c. la funzione è strettamente crescente nell'intervallo $[-1, 1]$ V F

d. la funzione è strettamente decrescente nell'intervallo $[1, 7]$ V F

e. la funzione è strettamente crescente nell'intervallo $[-1, 7]$ V F

f. la funzione è crescente in senso lato nell'intervallo $[-4, 1]$ V F

g. la funzione è strettamente decrescente nell'intervallo $[-7, -1]$ V F

211 ESERCIZIO SVOLTO

Dimostriamo che la funzione $f(x) = -3x + 1$ è strettamente decrescente in R.

Per ogni $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ risulta:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow -3x_1 > -3x_2 \Rightarrow -3x_1 + 1 > -3x_2 + 1 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Pertanto la funzione è strettamente decrescente.

212 Dimostra che la funzione $f(x) = -2x + 1$ è strettamente decrescente in **R**.

213 Dimostra che la funzione $f(x) = \dfrac{1}{3}x - 1$ è strettamente crescente in **R**.

214 Dimostra che la funzione $f(x) = 2x^3 + 1$ è strettamente crescente in **R**.

215 Dimostra che la funzione $f(x) = -3x^5 + 2$ è strettamente decrescente in **R**.

216 Dimostra che la funzione $f(x) = 3\sqrt{x}$ è strettamente crescente nel suo dominio.

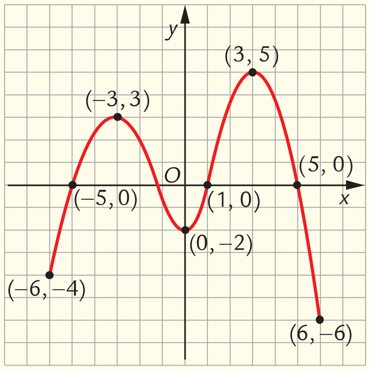
217 Dimostra che la funzione $f(x) = 2\sqrt[3]{x}$ è strettamente crescente in **R**.

218 **Inventa tu.** Traccia il grafico di una funzione, avente come dominio l'intervallo $[-4, 4]$, che sia strettamente crescente nell'intervallo $[-4, 0]$ e strettamente decrescente nell'intervallo $[0, 4]$.

219 **Inventa tu.** Traccia il grafico di una funzione, avente come dominio l'intervallo $[-6, 6]$, che sia decrescente, ma non in senso stretto, nel suo dominio.

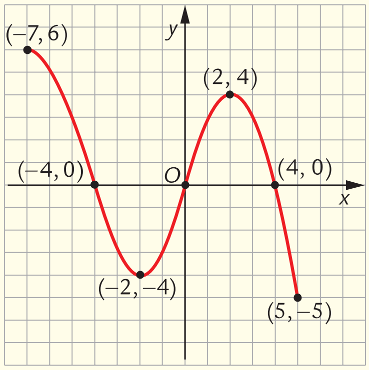
Esercizi riassuntivi sulle proprietà delle funzioni da R a R

220 In riferimento al grafico della funzione f qui a fianco, rispondi alle seguenti domande.



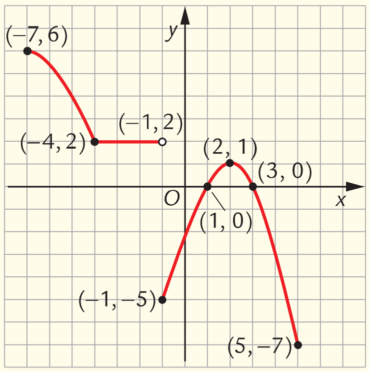
a. Quanto vale $f(0)$? E $f(6)$?
b. $f(-2)$ è positivo o negativo?
c. Qual è il dominio della funzione f?
d. Qual è l'immagine della funzione f?
e. Quanti sono gli zeri della funzione f?
f. Quante soluzioni ha l'equazione $f(x) = -5$?
g. Quante soluzioni ha l'equazione $f(x) = -1$?
h. In quali intervalli la funzione f è crescente in senso stretto?
i. In quali intervalli la funzione f è decrescente in senso stretto?
j. La funzione f è pari? È dispari?

221 In riferimento al grafico della funzione f qui a fianco, rispondi alle seguenti domande.



a. Quanto vale $f(-2)$? E $f(4)$?
b. $f(-1)$ è positivo o negativo?
c. Qual è il dominio della funzione f?
d. Qual è l'immagine della funzione f?
e. Quali sono gli zeri della funzione f?
f. Quante soluzioni ha l'equazione $f(x) = -5$?
g. Quante soluzioni ha l'equazione $f(x) = 7$?
h. In quale intervallo la funzione f è crescente in senso stretto?
i. In quali intervalli la funzione f è decrescente in senso stretto?
j. La funzione f è pari? È dispari?

222 In riferimento al grafico della funzione f qui a fianco, rispondi alle seguenti domande.



a. Quanto vale $f(1)$? E $f(-1)$?
b. $f(0)$ è positivo o negativo?
c. Qual è il dominio della funzione f?
d. Qual è l'immagine della funzione f?
e. Quali sono gli zeri della funzione f?
f. Quante soluzioni ha l'equazione $f(x) = 2$?
g. Quante soluzioni ha l'equazione $f(x) = -2$?
h. In quale intervallo la funzione f è crescente in senso stretto?
i. In quale intervallo la funzione f è decrescente in senso stretto?
j. Ci sono intervalli in cui la funzione f è costante? E in cui f è crescente in senso lato? E in cui f è decrescente in senso lato?

223 **Invènta tu.** Traccia il grafico di una funzione, avente come dominio l'intervallo $[-6, 6]$, che soddisfi le seguenti caratteristiche:
a. abbia due zeri;
b. la sua immagine sia l'intervallo $[-4, 4]$;
c. sia strettamente decrescente in $[-6, 0]$ e strettamente crescente in $[0, 6]$.

224 **Inventa tu.** Traccia il grafico di una funzione, avente come dominio l'intervallo $[-6, 6]$, che soddisfi le seguenti caratteristiche:
a. non abbia zeri;
b. la sua immagine sia l'intervallo $[2, 5]$;
c. sia crescente, ma non in senso stretto, nel dominio.

225 **Inventa tu.** Traccia il grafico di una funzione, avente come dominio l'intervallo $[-6, 6]$, che soddisfi le seguenti caratteristiche:
a. sia dispari;
b. la sua immagine sia l'intervallo $[-5, 5]$;
c. sia decrescente, ma non in senso stretto, nel dominio.

3. Funzioni iniettive, suriettive, biiettive

TEORIA a p. 78

226 **Vero o falso?**

a. se una funzione è suriettiva, allora è biiettiva V F

b. se una funzione è biiettiva, allora è suriettiva V F

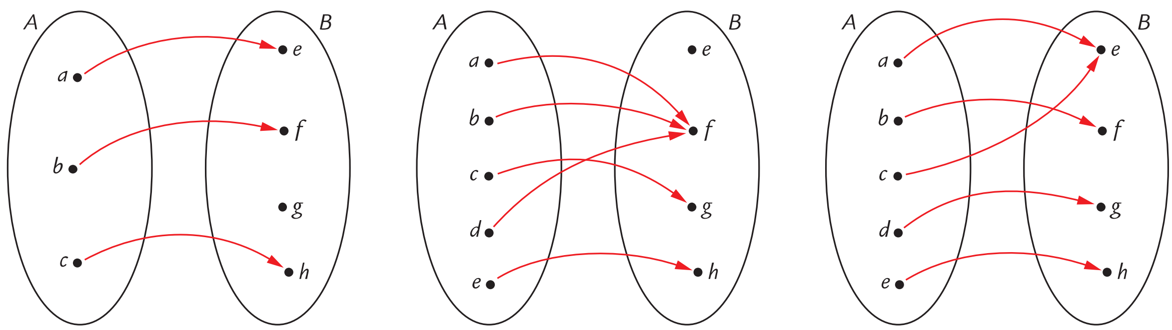
c. se una funzione non è iniettiva, allora non è biiettiva V F

d. se c'è una retta orizzontale che non interseca il grafico della funzione $y = f(x)$ in alcun punto, allora la funzione non è iniettiva V F

e. una funzione $y = f(x)$, pari e avente come dominio $\mathbf{R}$, non può essere biiettiva V F

[3 affermazioni vere e 2 false]

227 Stabilisci se ciascuna delle funzioni da A a B rappresentate nei seguenti diagrammi a frecce è iniettiva, suriettiva o biiettiva.



228 Sia A l'insieme dei punti appartenenti a una circonferenza e B l'insieme dei punti di un suo diametro; la funzione $f: A \to B$ che associa a ogni punto della circonferenza la sua proiezione su tale diametro è iniettiva? È suriettiva?

229 Sia A l'insieme delle circonferenze e B l'insieme dei punti del piano; la funzione $f: A \to B$ che associa a ogni circonferenza il suo centro è iniettiva? È suriettiva?

230 Sia A l'insieme dei punti appartenenti a una semicirconferenza e B l'insieme dei punti del suo diametro; la funzione $f: A \to B$ che associa a ogni punto della semicirconferenza la sua proiezione sul diametro è iniettiva? È suriettiva?

231 Sia A l'insieme delle circonferenze aventi centro in un punto O (fissato) del piano e B l'insieme dei numeri reali positivi; la funzione $f: A \to B$ che associa a ogni circonferenza la misura del suo raggio è iniettiva? La funzione f è suriettiva?

232 Sia $A = \{-27, -8, -1, 0, 1, 8, 27\}$; determina l'insieme B in modo che la funzione $f: A \to B$ definita da $f(x) = \sqrt[3]{x}$ risulti suriettiva.

233 Dati gli insiemi $A = \{a, b\}$ e $B = \{c, d, e\}$, **non** è possibile definire alcuna funzione *suriettiva* $f: A \to B$. Chiarisci questa affermazione.

234 Dati gli insiemi $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{d, e\}$ **non** è possibile definire alcuna funzione *iniettiva* $f: A \to B$. Chiarisci questa affermazione.

235 Sia $A = \{a, b\}$ e $B = \{c, d\}$. Definisci tutte le possibili funzioni *suriettive* da A a B.

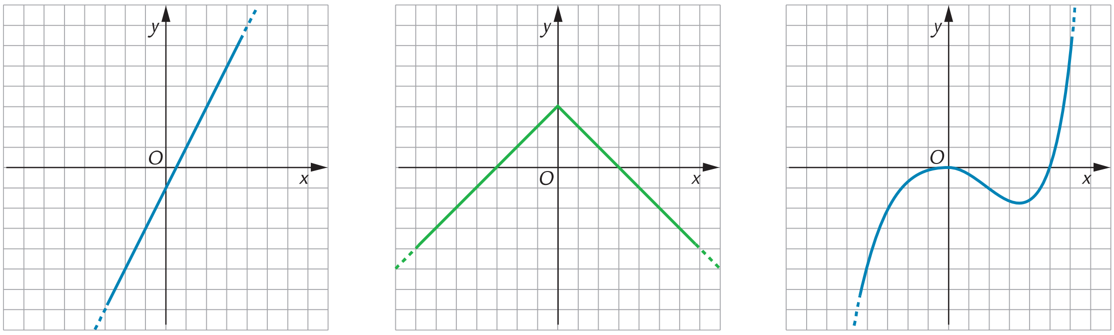
[Si possono definire due funzioni suriettive]

236 Sia $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{d, e\}$. Definisci tutte le possibili funzioni *suriettive* da A a B. Qualcuna di queste funzioni è anche *biiettiva*?

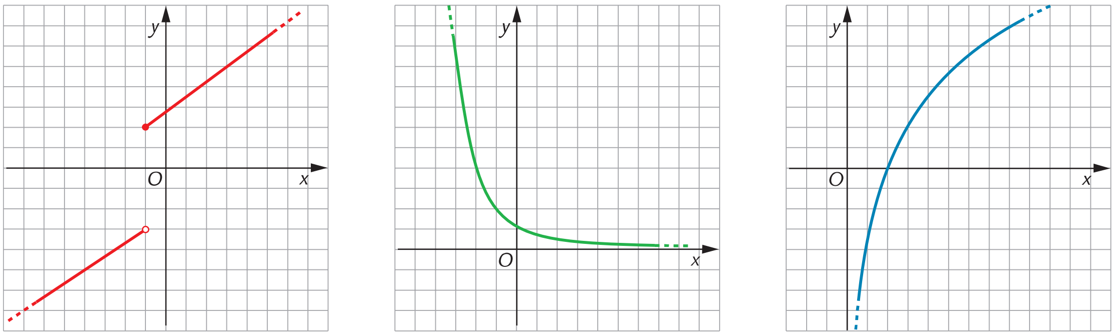
[Si possono definire sei funzioni suriettive da A a B]

Esercizi riguardanti le funzioni reali di variabile reale

237 **Dal grafico alle sue proprietà.** Stabilisci, per ciascuna delle funzioni di cui è tracciato il grafico, se si tratta di una funzione iniettiva, suriettiva o biiettiva.



238 **Dal grafico alle sue proprietà.** Stabilisci, per ciascuna delle funzioni di cui è tracciato il grafico, se si tratta di una funzione iniettiva, suriettiva o biiettiva.



239 ESERCIZIO SVOLTO

Stabiliamo se le seguenti funzioni sono iniettive, suriettive o biiettive:

a. $f(x) = x^2 + 3x$ **b.** $g(x) = x^3$

Osserviamo preliminarmente che le funzioni date sono definite per ogni $x \in \mathbf{R}$, quindi il loro *dominio* è $\mathbf{R}$. Inoltre, come convenuto, in assenza di indicazioni diverse, si assume come *codominio* $\mathbf{R}$.

a. La funzione f **non** è *iniettiva*: per esempio, $f(-3) = f(0) = 0$.
La funzione f **non** è *suriettiva*: per esempio, -4 non ha alcuna controimmagine perché l'equazione $x^2 + 3x = -4$ non ha alcuna soluzione reale (l'equazione equivale a $x^2 + 3x + 4 = 0$ e $\Delta = -7 < 0$).
Pertanto f **non** può essere *biiettiva*.

b. La funzione g è *iniettiva*; infatti:

$$g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow x_1 = x_2$$

La funzione g è *suriettiva*; infatti, comunque scelto $y \in \mathbf{R}$, l'equazione $x^3 = y$ ammette come soluzione $x = \sqrt[3]{y}$, dunque ogni elemento di $\mathbf{R}$ ha come controimmagine nella g la sua radice cubica.
Poiché g è iniettiva e suriettiva, è anche *biiettiva*.

Stabilisci se ciascuna delle seguenti funzioni è iniettiva, suriettiva o biiettiva.

240 $f(x) = 2x - 1$

241 $f(x) = 2 - x$

242 $f(x) = x^2 - 2x$

243 $f(x) = -x^2$

244 $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2$

245 $f(x) = \sqrt{x}$

246 $f(x) = \dfrac{1}{x}$

247 $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - 1$

248 $f(x) = \sqrt[3]{x + 2}$

249 $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ (*Suggerimento*: per stabilire se è suriettiva, cerca se esistono controimmagini di 1; per stabilire se è iniettiva, verifica che $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \dfrac{x_1}{x_1^2 + 1} = \dfrac{x_2}{x_2^2 + 1} \Leftrightarrow (x_2 - x_1)(x_1 x_2 - 1) = 0$ quindi...)

250 $y = \dfrac{x^2}{x - 1}$ (*Vedi* il suggerimento dell'esercizio precedente)

251 $f(x) = x|x|$

4. Funzione inversa

TEORIA a p. 82

252 **Vero o falso?**

a. se g è la funzione inversa di f, allora il dominio di f è lo stesso di g V F

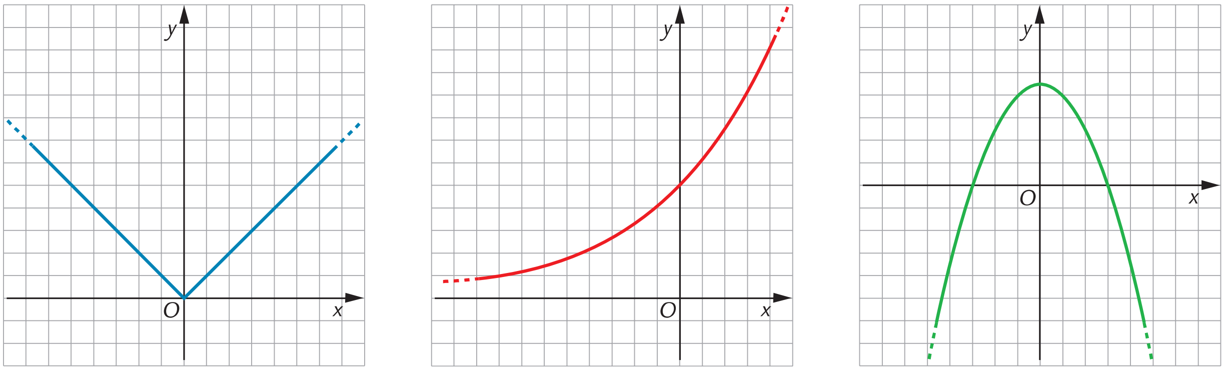
b. se g è la funzione inversa di f, allora il grafico di g è il simmetrico di quello di f rispetto alla bisettrice del primo e del terzo quadrante V F

c. se il dominio di una funzione invertibile è $[0, +\infty)$, l'immagine della sua inversa è $(-\infty, 0]$ V F

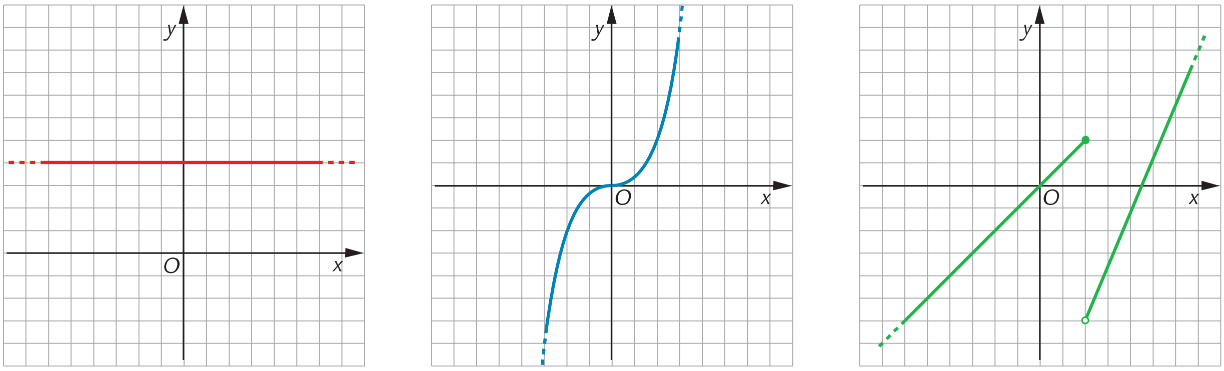
d. se f è una funzione invertibile e $f(3) = 4$, allora, detta f^{-1} la funzione inversa, risulta $f^{-1}(4) = 3$ V F

[2 affermazioni vere e 2 false]

253 **Dal grafico alle sue proprietà.** Per ciascuna delle funzioni di cui è tracciato il grafico, stabilisci se è invertibile.



254 **Dal grafico alle sue proprietà.** Per ciascuna delle funzioni di cui è tracciato il grafico, stabilisci se è invertibile.

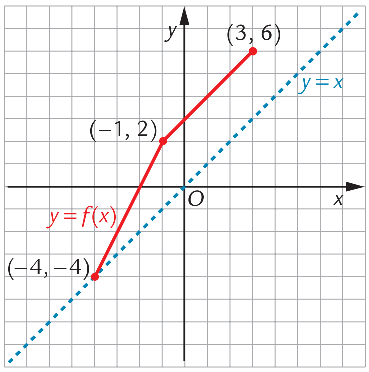


255 Nella figura è rappresentato (in rosso) il grafico di una funzione invertibile $y = f(x)$. Traccia il grafico della funzione inversa e completa:

a. $f^{-1}(-4) =$ ....

b. $f(-1) =$ ....

c. $f^{-1}(6) =$ ....

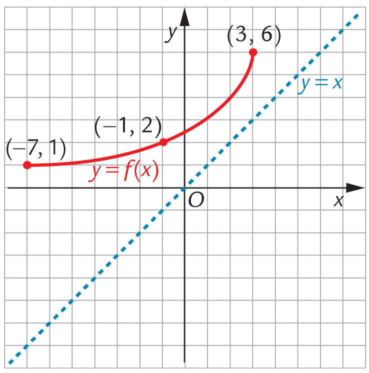


256 Nella figura è rappresentato (in rosso) il grafico di una funzione invertibile $y = f(x)$. Traccia il grafico della funzione inversa e completa:

a. $f^{-1}(2) =$ ....

b. $f(-7) =$ ....

c. $f^{-1}(6) =$ ....



257 ESERCIZIO GUIDATO

Verifica che la funzione $f(x) = 2x + 1$ è invertibile e determina l'espressione analitica dell'inversa.

- Per verificare che la funzione è invertibile, verifica che è iniettiva:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

- Per determinare l'espressione analitica della funzione inversa, scambia anzitutto x con y nell'equazione $y = f(x)$, cioè in $y = 2x + 1$; ottieni l'equazione:

$$x = 2y + 1$$

Ora risolvi questa equazione rispetto a y:

$$x = 2y + 1 \Rightarrow 2y = \dots\dots \Rightarrow y = \dots\dots$$

Puoi concludere che:

$$f^{-1}(x) = \frac{\dots\dots}{2}$$

Nei seguenti esercizi sono assegnate alcune funzioni. Verifica che sono invertibili e determina l'espressione analitica dell'inversa.

258 $f(x) = 1 - 3x$ $\left[f^{-1}(x) = \dfrac{1-x}{3}\right]$

259 $f(x) = x^3 - 1$ $\left[f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1}\right]$

260 $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$ $\left[f^{-1}(x) = x^3 - 1\right]$

261 $f(x) = 4x - 2$ $\left[f^{-1}(x) = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{2}\right]$

262 $f(x) = x^3 - 2$ $\left[f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+2}\right]$

263 $f(x) = \dfrac{4}{x+2}$ $\left[f^{-1}(x) = \dfrac{4}{x} - 2\right]$

264 $f(x) = \dfrac{1}{x-2} - 3$ $\left[f^{-1}(x) = \dfrac{2x+7}{x+3}\right]$

265 $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1} + 1$ $\left[f^{-1}(x) = \dfrac{x}{3-x}\right]$

266 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} - 2$ $\left[f^{-1}(x) = \dfrac{1}{(x+2)^3}\right]$

267 $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt[3]{x+1}}$ $\left[f^{-1}(x) = \dfrac{1}{8x^3} - 1\right]$

268 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ $\left[f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x^2} + 1, \text{ con } x > 0\right]$

269 $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}$ $\left[f^{-1}(x) = \left(\dfrac{1-2x}{x-1}\right)^2, \text{ con } \dfrac{1}{2} \le x < 1\right]$

270 ESERCIZIO SVOLTO

Dopo aver verificato che la funzione $f(x) = x^2 + 1$, con $x \geq 0$, è invertibile, determiniamo l'espressione analitica dell'inversa.

- Per verificare che la funzione è invertibile, verifichiamo che è iniettiva; per ogni x_1, x_2, con $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 + 1 = x_2^2 + 1 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = \pm x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

Non può essere $x_1 = -x_2$ a causa della condizione $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$

- Scambiando x con y nell'equazione che definisce la funzione f, cioè $y = x^2 + 1$ con $x \geq 0$, otteniamo l'equazione che definisce la funzione inversa:

$$x = y^2 + 1 \quad \text{con} \quad y \geq 0$$

Attenzione a sostituire y al posto di x non solo nell'equazione $y = x^2 + 1$ ma anche nella condizione $x \geq 0$

- Risolviamo l'equazione ottenuta rispetto a y, tenendo conto della condizione $y \geq 0$:

$$x = y^2 + 1 \Rightarrow y^2 = x - 1 \Rightarrow y = \pm\sqrt{x-1} \Rightarrow y = \sqrt{x-1}$$

La soluzione con il meno è da scartare a causa della condizione $y \geq 0$

- Concludiamo quindi che $f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$.

Nei seguenti esercizi sono assegnate alcune funzioni. Verifica che sono invertibili e determina l'espressione analitica dell'inversa.

271 $f(x) = \dfrac{x^2 - 2}{3x^2}$, con $x > 0$ $\left[f^{-1}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{1-3x}}\right]$

272 $f(x) = x^2 + 2$, con $x \le 0$ $[f^{-1}(x) = -\sqrt{x-2}]$

273 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 2x}}$, con $x > 0$ $\left[f^{-1}(x) = -1 + \sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}} \text{ con } x > 0\right]$

274 $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, con $x \le 0$ $[f^{-1}(x) = -\sqrt{x^2 - 1}$, con $x \ge 0]$

275 Verifica che le seguenti funzioni sono invertibili e che ciascuna coincide con la sua inversa:

a. $y = \dfrac{1}{x}$ **b.** $y = -\dfrac{x}{x+1}$ **c.** $y = \sqrt{4 - x^2}$, con $0 \le x \le 2$

5. L'algebra delle funzioni e le funzioni composte

TEORIA a p. 84

L'algebra delle funzioni

Date le funzioni f e g, scrivi l'espressione analitica delle funzioni $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, $\dfrac{f}{g}$ e determina il loro dominio.

276 $f(x) = 2x - 1$ $g(x) = -2x + 3$

277 $f(x) = \sqrt{x}$ $g(x) = \sqrt{5 - x}$

278 $f(x) = x^2 - 1$ $g(x) = 2x^2 + 3x - 5$

279 $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ $g(x) = \sqrt{x + 1}$

280 $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-1}$ $g(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$

281 Date le funzioni

$f(x) = 2x + 3$ e $(f + g)(x) = 4 - \dfrac{1}{2}x$,

determina l'espressione analitica della funzione g.

282 Date le funzioni $f(x) = -\dfrac{1}{x}$ e $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$, determina l'espressione analitica della funzione g.

Composizione di due funzioni

283 ESERCIZIO GUIDATO

Sia $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = 2x + 4$.
Senza determinare l'espressione analitica di $f \circ g$ e $g \circ f$, calcola:

a. $(f \circ g)(-1)$ **b.** $(g \circ f)(3)$

---

a. $(f \circ g)(-1) = f(g(-1)) = f(2) = \ldots\ldots$

$g(-1) = 2(-1) + 4 = 2$ $f(2) = 2^2 + 1 = \ldots$

b. $(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(\ldots\ldots) = \ldots\ldots$

284 Considera le funzioni $f(x) = x^2 + x$ e $g(x) = x + 1$. Senza determinare l'espressione analitica di $f \circ g$ e $g \circ f$, calcola $(f \circ g)(-1)$ e $(g \circ f)(3)$. $[(f \circ g)(-1) = 0,\ (g \circ f)(3) = 13]$

285 Considera le due funzioni $f(x) = \sqrt{2x}$ e $g(x) = \sqrt[3]{x^2 + 2}$. Senza determinare l'espressione analitica di $f \circ g$ e $g \circ f$, calcola $(f \circ g)(\sqrt{6})$ e $(g \circ f)(8)$. $[(f \circ g)(\sqrt{6}) = 2,\ (g \circ f)(8) = \sqrt[3]{18}]$

286 Siano $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ e $g(x) = (x^2 + 1)^{-1}$. Senza determinare l'espressione analitica di $f \circ g$ e $g \circ f$, calcola $(f \circ g)(-1)$ e $(g \circ f)(4)$. $\left[(f \circ g)(-1) = \sqrt{2},\ (g \circ f)(4) = \dfrac{4}{5}\right]$

287 **ESERCIZIO SVOLTO**

Consideriamo le due funzioni $f(x) = \frac{1}{x+1}$ e $g(x) = \frac{5}{x-2}$. Determiniamo il dominio della funzione $f \circ g$, senza determinare la sua espressione analitica.

Per determinare il dominio di $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, osserviamo intanto che dovrà essere $x \neq 2$ affinché la funzione g sia definita. Inoltre, la funzione f è definita per $x \neq -1$, quindi $g(x)$ dovrà essere diverso da -1:

$$\frac{5}{x-2} \neq -1 \Rightarrow 5 \neq -x+2 \Rightarrow x \neq -3$$

In conclusione, dovrà essere $x \neq 2$ e $x \neq -3$, quindi il dominio di $f \circ g$ sarà $\mathbf{R} - \{-3, 2\}$.

288 Considera le due funzioni $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ e $g(x) = \frac{2}{x+3}$. Determina il dominio della funzione $f \circ g$, senza determinare la sua espressione analitica. $[\mathbf{R} - \{-5, -3\}]$

289 Considera le funzioni $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ e $g(x) = \frac{2}{x+3}$. Determina il dominio della funzione $g \circ f$, senza determinare la sua espressione analitica. $\left[\mathbf{R} - \left\{-1, -\frac{1}{2}\right\}\right]$

290 Considera le due funzioni $f(x) = \sqrt{x^2-2x-3}$ e $g(x) = \frac{x-1}{x}$. Determina il dominio della funzione $f \circ g$ senza determinare la sua espressione analitica. $\left[-\frac{1}{2} \leq x < 0 \vee 0 < x \leq \frac{1}{2}\right]$

291 Considera le due funzioni $f(x) = \sqrt{x^2-2x-3}$ e $g(x) = \frac{x-1}{x}$. Determina il dominio della funzione $g \circ f$, senza determinare la sua espressione analitica. $[x < -1 \vee x > 3]$

292 **ESERCIZIO GUIDATO**

Considera le funzioni $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = x^2 + 1$. Determina l'espressione analitica di $f \circ g$ e di $g \circ f$ e verifica che $f \circ g \neq g \circ f$.

Risulta:

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (x^2+1)^2 - 1 =$ ....

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (x^2-1)^2 + 1 =$ ....

È evidente che $f \circ g \neq g \circ f$.

Determina l'espressione analitica di $f \circ g$ e di $g \circ f$, specificando il dominio di ciascuna funzione composta (nelle risposte sono riportate solo le espressioni analitiche delle due funzioni).

293 $f(x) = 2x+1$ $\quad g(x) = 2x$ $\quad [(f \circ g)(x) = 4x+1;\ (g \circ f)(x) = 4x+2]$

294 $f(x) = 2x$ $\quad g(x) = \frac{1}{4}x - 1$ $\quad \left[(f \circ g)(x) = \frac{1}{2}x - 2;\ (g \circ f)(x) = \frac{1}{2}x - 1\right]$

295 $f(x) = x-1$ $\quad g(x) = x^2+4$ $\quad [(f \circ g)(x) = x^2+3;\ (g \circ f)(x) = x^2-2x+5]$

296 $f(x) = x^2-1$ $\quad g(x) = x-3$ $\quad [(f \circ g)(x) = x^2-6x+8;\ (g \circ f)(x) = x^2-4]$

297 $f(x) = x^2$ $\quad g(x) = x+1$ $\quad [(f \circ g)(x) = (x+1)^2;\ (g \circ f)(x) = x^2+1]$

298 $f(x) = x^2+x$ $\quad g(x) = x^2$ $\quad [(f \circ g)(x) = x^4+x^2;\ (g \circ f)(x) = x^4+2x^3+x^2]$

299 $f(x) = (x-1)^2$ $\quad g(x) = x+1$ $\quad [(f \circ g)(x) = x^2;\ (g \circ f)(x) = x^2-2x+2]$

300 $f(x) = 2x-1$ $\quad g(x) = \sqrt{x-2}$ $\quad [(f \circ g)(x) = 2\sqrt{x-2}-1;\ (g \circ f)(x) = \sqrt{2x-3}]$

301 $f(x) = \frac{2}{x+1}$ $\quad g(x) = 2x$ $\quad \left[(f \circ g)(x) = \frac{2}{2x+1};\ (g \circ f)(x) = \frac{4}{x+1}\right]$

302 $f(x) = \frac{5}{x-3}$ $\quad g(x) = \frac{2}{x}$ $\quad \left[(f \circ g)(x) = \frac{5x}{2-3x};\ (g \circ f)(x) = \frac{2}{5}x - \frac{6}{5}\right]$

303 $f(x)=\begin{cases} x-2 & \text{se} \quad x\geq 1 \\ -x & \text{se} \quad x<1 \end{cases} \qquad g(x)=2x$

$\left(\textit{Suggerimento}\text{: } (f\circ g)(x)=f(g(x))=\begin{cases} g(x)-2 & \text{se} \quad g(x)\geq 1 \\ -g(x) & \text{se} \quad g(x)<1 \end{cases}; (g\circ f)(x)=g(f(x))=2f(x)\right)$

$\left[(f\circ g)(x)=\begin{cases} 2x-2 & \text{se} \quad x\geq \dfrac{1}{2} \\ -2x & \text{se} \quad x<\dfrac{1}{2} \end{cases}; \quad (g\circ f)(x)=\begin{cases} 2x-4 & \text{se} \quad x\geq 1 \\ -2x & \text{se} \quad x<1 \end{cases}\right]$

304 $f(x)=\begin{cases} x+2 & \text{se} \quad x\geq 1 \\ 2x & \text{se} \quad x<1 \end{cases} \qquad g(x)=2x$

$\left[(f\circ g)(x)=\begin{cases} 2x+2 & \text{se} \quad x\geq \dfrac{1}{2} \\ 4x & \text{se} \quad x<\dfrac{1}{2} \end{cases}; \quad (g\circ f)(x)=\begin{cases} 2x+4 & \text{se} \quad x\geq 1 \\ 4x & \text{se} \quad x<1 \end{cases}\right]$

Determina le espressioni analitiche di due funzioni f e g tali che $f\circ g=z$, essendo z la funzione assegnata (le funzioni f e g non sono uniche).

305 $z(x)=(3x-2)^4$

306 $z(x)=\sqrt{x^2+4}$

307 $z(x)=|x^2-x|$

308 $z(x)=(1+x^2)^3$

309 **Esplorazione.** È data la funzione definita da $f(x)=2x$. Determina l'espressione analitica di:

a. $f\circ f$ **b.** $f\circ f\circ f$ **c.** $f\circ f\circ f\circ f$

Formula una congettura sull'espressione analitica della funzione $\underbrace{f\circ f\circ \ldots\ldots \circ f\circ f}_{n \text{ volte}}$, ottenuta componendo $n-1$ volte la funzione f con se stessa.

$[(f\circ f)(x)=4x; (f\circ f\circ f)(x)=8x; (f\circ f\circ f\circ f)(x)=16x]$

310 Considera le funzioni $f(x)=x^2$ e $g(x)=\sqrt{|x|}$. Determina le espressioni analitiche di $f\circ g$ e $g\circ f$ e stabilisci se $f\circ g=g\circ f$.

311 Considera le funzioni $f(x)=|x|$ e $g(x)=x^4-x^2+2$. Determina le espressioni analitiche di $f\circ g$ e $g\circ f$ e stabilisci se $f\circ g=g\circ f$.

Esercizi riassuntivi su funzioni composte e funzioni inverse

312 Data la funzione $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+2}$, determina $(f\circ f)(x)$ e stabilisci per quali valori di x risulta $(f\circ f)(x)\geq 0$.

$\left[x<-\dfrac{3}{4}\vee x\geq \dfrac{4}{3}, \text{ con } x\neq -2\right]$

313 Date le funzioni $f(x)=\sqrt{x^2+4x-5}$ e $g(x)=x^2-1$, determina il dominio della funzione $f\circ g$.

$[x\leq -\sqrt{2}\vee x\geq \sqrt{2}]$

314 Data la funzione $f(x)=\dfrac{2x}{x+2}$, determina $(f\circ f)(x)$ e stabilisci per quali valori di x risulta $(f\circ f)(x)\geq 0$.

$[x<-1\vee x\geq 0, \text{ con } x\neq -2]$

315 Date le funzioni $f(x)=2x+1$ e $g(x)=|x-1|$, determina per quali valori di x risulta $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$.

$\left[x=\dfrac{3}{4}\right]$

316 Date le funzioni $f(x)=\sqrt{x+k}$ e $g(x)=x-1$, determina k in modo che il grafico della funzione $g\circ f$ intersechi l'asse y nel punto di coordinate $(0, 4)$. $[k=25]$

317 Date le funzioni $f(x)=3x^2-x$ e $g(x)=2x-a$, determina a in modo che il grafico della funzione $f\circ g$ incontri l'asse y nel punto di coordinate $(0, 4)$.

$\left[a=-\dfrac{4}{3}\vee a=1\right]$

318 Date le funzioni $f(x)=3x^2-x$ e $g(x)=2x-a$, determina a in modo che il grafico della funzione $g\circ f$ incontri l'asse y nel punto di coordinate $(0, 4)$. $[a=-4]$

319 Date le funzioni $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ e $g(x) = x + k$, determina k in modo che il grafico della funzione $f \circ g$ incontri l'asse y nel punto di coordinate $(0, 2)$. $[k = -3]$

320 Date le funzioni $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ e $g(x) = x + k$, determina k in modo che il grafico della funzione $g \circ f$ incontri l'asse y nel punto di coordinate $(0, 2)$. $[k = 3]$

321 Determina almeno due coppie diverse di funzioni f e g tali che $f \circ g = z$, essendo z la funzione definita da $z(x) = (x^2 - 1)^{20}$.

322 Considera la funzione $f(x) = 2x - 1$; determina $f \circ f$, $f \circ f \circ f$. Determina per quali valori di x risulta $(f \circ f)(x) = (f \circ f \circ f)(x)$. $[(f \circ f)(x) = 4x - 3,\ (f \circ f \circ f)(x) = 8x - 7;\ x = 1]$

323 Considera le funzioni $f\colon \mathbf{N} \to \mathbf{Z}$ e $g : \mathbf{Z} \to \mathbf{N}$ definite da $f(x) = x$ e $g(x) = |x|$. Verifica che $g \circ f$ è biiettiva ma che f e g **non** sono biiettive.

324 Giustifica perché la funzione $f(x) = 2x + 3$ è invertibile e determina l'espressione analitica dell'inversa. Verifica che $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$.

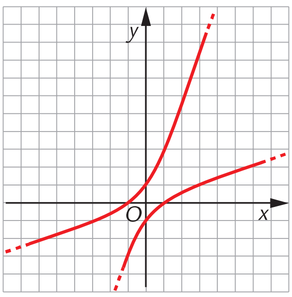
325 Giustifica perché la funzione $f(x) = x^3 + 1$ è invertibile e determina l'espressione analitica dell'inversa. Verifica che $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$.

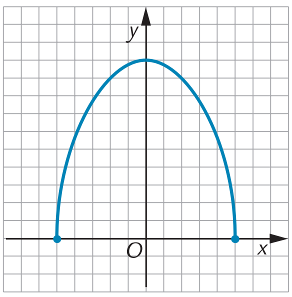
326 Sono date le funzioni $f(x) = x - 1$, $g(x) = x^3$. Giustifica perché sono invertibili e determina l'espressione analitica di ciascuna delle seguenti funzioni: f^{-1}, g^{-1}, $f \circ g$, $(f \circ g)^{-1}$. Verifica che risulta $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

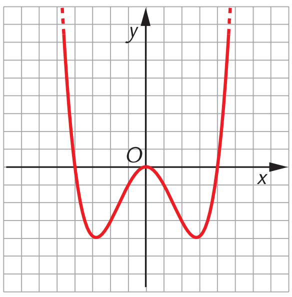
RIEPILOGO

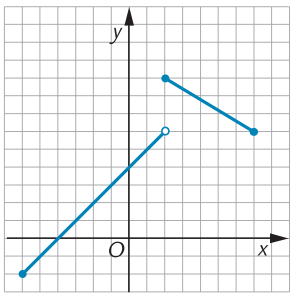
Esercizi di riepilogo

327 **Interpretazione di grafici.** Per ciascuna delle relazioni rappresentate, individua il dominio e l'insieme immagine. Stabilisci quindi se si tratta del grafico di una funzione e in caso affermativo determina i suoi eventuali zeri e stabilisci se si tratta di una funzione invertibile.



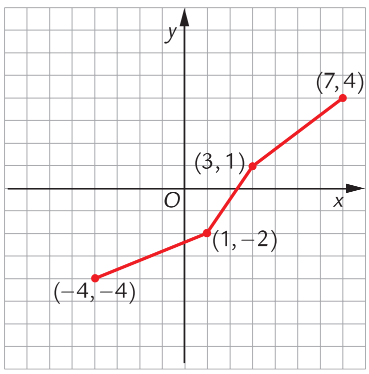






328 **Interpretazione di grafici.** Considera la funzione il cui grafico è tracciato qui sotto e rispondi alle seguenti domande.

a. Qual è il dominio della funzione?
b. Qual è l'immagine della funzione?
c. $f(2)$ è positivo o negativo?
d. Si tratta di una funzione strettamente crescente o strettamente decrescente nel suo dominio?
e. Quanti zeri ammette la funzione?
f. Si tratta di una funzione invertibile? In caso affermativo, traccia il grafico dell'inversa.



329 Considera la funzione $y = -\dfrac{1}{2}x + 3$.

a. Classifica la funzione e determina il suo dominio.
b. Stabilisci se si tratta di una funzione pari o dispari.
c. Studia il segno della funzione e rappresenta nel piano cartesiano le regioni alle quali appartiene il suo grafico. Specifica quali sono gli eventuali zeri della funzione.
d. Traccia, per punti, il grafico della funzione.
e. Determina l'immagine della funzione.
f. Verifica che si tratta di una funzione invertibile e determina l'espressione analitica dell'inversa.

[**a.** $D = \mathbf{R}$; **b.** né pari né dispari; **c.** $y > 0$ per $x < 6$, $y = 0$ per $x = 6$, $y < 0$ per $x > 6$; **e.** $I = \mathbf{R}$; **f.** $y = 6 - 2x$]

330 Considera la funzione $y = -\dfrac{6}{x^2}$.

a. Classifica la funzione e determina il suo dominio.
b. Stabilisci se si tratta di una funzione pari o dispari.
c. Studia il segno della funzione e rappresenta nel piano cartesiano le regioni alle quali appartiene il suo grafico. Specifica quali sono gli eventuali zeri della funzione.
d. Traccia, per punti, il grafico della funzione.
e. Determina l'immagine della funzione.
f. Giustifica perché la funzione data non è invertibile.
g. Verifica che la restrizione della funzione all'intervallo $(0, +\infty)$ è invertibile e determina l'espressione analitica dell'inversa.

$\left[\right.$**a.** $D = \mathbf{R} - \{0\}$; **b.** pari; **c.** $y \geq 0$ per nessun valore di x, $y < 0$ per ogni $x \in D$; **e.** $I = (-\infty, 0)$; **g.** $y = \sqrt{-\dfrac{6}{x}}\left.\right]$

331 Considera la funzione $y = -\dfrac{6}{x}$.

a. Classifica la funzione e determina il suo dominio.
b. Stabilisci se si tratta di una funzione pari o dispari.
c. Studia il segno della funzione e rappresenta nel piano cartesiano le regioni alle quali appartiene il suo grafico. Specifica quali sono gli eventuali zeri della funzione.
d. Traccia, per punti, il grafico della funzione.
e. Determina l'immagine della funzione.
f. Verifica che si tratta di una funzione invertibile e determina l'espressione analitica dell'inversa.

[**a.** $D = \mathbf{R} - \{0\}$; **b.** dispari; **c.** $y > 0$ per $x < 0$, $y = 0$ per nessun valore di x, $y < 0$ per $x > 0$;
e. $I = \mathbf{R} - \{0\}$; **f.** l'inversa coincide con la funzione stessa]

332 Considera la funzione $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 1$.

a. Classifica la funzione e determina il suo dominio.
b. Stabilisci se si tratta di una funzione pari o dispari.
c. Studia il segno della funzione e rappresenta nel piano cartesiano le regioni alle quali appartiene il suo grafico. Specifica quali sono gli eventuali zeri della funzione.
d. Traccia, per punti, il grafico della funzione.
e. Determina l'immagine della funzione.
f. Giustifica perché la funzione data non è invertibile.
g. Verifica che la restrizione della funzione all'intervallo $(-\infty, 0)$ è invertibile e determina l'espressione analitica dell'inversa.

[**a.** $D = \mathbf{R}$; **b.** pari; **c.** $y > 0$ per $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$, $y = 0$ per $x = \pm\sqrt{2}$, $y < 0$ per $x < -\sqrt{2} \vee x > \sqrt{2}$;
e. $I = (-\infty, 1]$; **g.** $y = -\sqrt{2 - 2x}$]

333 Considera la funzione $y = (x-2)^2(x^2 + 3x)^3$.

a. Classificala e determina il suo dominio.
b. Determina $f(-1)$.
c. Studia il segno della funzione e rappresenta nel piano cartesiano le regioni alle quali appartiene il suo grafico. Specifica quali sono gli eventuali zeri della funzione.
d. Giustifica perché la funzione data non è invertibile.

[**a.** $D = \mathbf{R}$; **b.** -72; **c.** $y > 0$ per $x < -3 \vee x > 0$, con $x \neq 2$; $y = 0$ per $x = -3 \vee x = 0 \vee x = 2$;
$y < 0$ per $-3 < x < 0$]

334 Considera la funzione $y = \frac{x+2}{x-6}$.

a. Classificala e determina il suo dominio.

b. Determina $f(-4)$ e $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

c. Studia il segno della funzione e rappresenta nel piano cartesiano le regioni alle quali appartiene il suo grafico. Specifica quali sono gli eventuali zeri della funzione.

d. Giustifica perché la funzione data è invertibile e scrivi l'espressione analitica della funzione inversa.

$\left[\mathbf{a.}\ D = \mathbf{R} - \{6\};\ \mathbf{b.}\ f(-4) = \frac{1}{5}, f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{11};\right.$
$\left.\mathbf{c.}\ y > 0 \text{ per } x < -2 \vee x > 6, y = 0 \text{ per } x = -2, y < 0 \text{ per } -2 < x < 6;\ \mathbf{d.}\ y = \frac{6x+2}{x-1}\right]$

335 Considera la funzione $y = \sqrt{x^2 - 1} - 2x$.

a. Classificala e determina il suo dominio.

b. Determina la controimmagine di 2.

c. Studia il segno della funzione e rappresenta nel piano cartesiano le regioni alle quali appartiene il suo grafico. Specifica quali sono gli eventuali zeri della funzione.

d. Senza determinare l'espressione analitica di $f \circ f$, determina il suo dominio.

$[\mathbf{a.}\ D = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty);\ \mathbf{b.}\ x = -1;$
$\mathbf{c.}\ y > 0 \text{ per } x \leq -1, y = 0 \text{ per nessun valore di } x; y < 0 \text{ per } x \geq 1;\ \mathbf{d.}\ (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)]$

336 Considera la funzione $y = \frac{x+2}{\sqrt{2x-1} - \sqrt{x}}$.

a. Classificala e determina il suo dominio.

b. Determina $f(2)$.

c. Studia il segno della funzione e rappresenta nel piano cartesiano le regioni alle quali appartiene il suo grafico. Specifica quali sono gli eventuali zeri della funzione.

d. Stabilisci se la funzione data è uguale alla funzione $y = \frac{x+2}{x-1}\left(\sqrt{2x-1} + \sqrt{x}\right)$.

$\left[\mathbf{a.}\ D = \left[\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, +\infty);\ \mathbf{b.}\ f(2) = 4\sqrt{3} + 4\sqrt{2};\right.$
$\left.\mathbf{c.}\ y > 0 \text{ se } x > 1, y = 0 \text{ per nessun valore di } x, y < 0 \text{ se } \frac{1}{2} \leq x < 1\right]$

337 Considera la funzione $y = \frac{|x+2| - 1}{\sqrt{x^2+1} - x}$.

a. Classificala e determina il suo dominio.

b. Determina $f(-2\sqrt{2})$.

c. Studia il segno della funzione e rappresenta nel piano cartesiano le regioni alle quali appartiene il suo grafico. Specifica quali sono gli eventuali zeri della funzione.

d. Giustifica perché la funzione data non è invertibile.

$[\mathbf{a.}\ D = \mathbf{R};\ \mathbf{b.}\ 12\sqrt{2} - 17;$
$\mathbf{c.}\ y > 0 \text{ per } x < -3 \vee x > -1, y = 0 \text{ per } x = -3 \vee x = -1, y < 0 \text{ per } -3 < x < -1]$

338 Data la funzione $f(x) = mx + q$, determina m e q in modo che risulti $f(0) = 3$ e $f(-2) = 0$. Considera la funzione ottenuta in corrispondenza dei valori di m e q trovati. Giustifica perché è invertibile e determina l'espressione analitica della funzione inversa.

$\left[m = \frac{3}{2}, q = 3; f^{-1}(x) = \frac{2}{3}x - 2\right]$

339 Data la funzione $f(x) = \frac{x+a}{x+b}$, determina a e b in modo che risulti $f(-2) = 0$ e $f(0) = 2$. Considera la funzione ottenuta in corrispondenza dei valori di a e b trovati. Giustifica perché è invertibile e determina l'espressione analitica della funzione inversa.

$\left[a = 2, b = 1; y = \frac{x-2}{1-x}\right]$

340 Data la funzione $f(x) = \frac{x}{x^2 + kx + h}$, determina h e k in modo che il suo dominio sia $\mathbf{R} - \{-3\}$. $[k = 6, h = 9]$

341 Data la funzione $f(x) = \frac{x+a}{x+b}$, determina a e b in modo che il suo dominio sia $\mathbf{R} - \{-3\}$ e inoltre risulti $f(0) = 6$. $[a = 18, b = 3]$

342 Data la funzione $f(x) = \sqrt{x^2 - ax + 10}$, determina per quali valori di a:

a. il suo dominio è $\mathbf{R}$;
b. il grafico della funzione ha un unico punto di intersezione con l'asse x;
c. uno dei due punti di intersezione del grafico della funzione con l'asse x ha coordinate $(2, 0)$.

[**a.** $-2\sqrt{10} \le a \le 2\sqrt{10}$; **b.** $a = \pm 2\sqrt{10}$; **c.** $a = 7$]

343 Siano date le due funzioni:

$$f(x) = 2x - 1 \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{1}{2}x + k$$

Determina:
a. per quale valore di k il grafico della funzione $f \circ g$ interseca l'asse x nel punto di coordinate $(2, 0)$;
b. per quale valore di k il grafico della funzione $g \circ f$ interseca l'asse y nel punto di coordinate $(0, 2)$.

$\left[\textbf{a. } k = -\frac{1}{2}; \textbf{ b. } k = \frac{5}{2}\right]$

344 Data la funzione $f(x) = \frac{1}{2}x + k$, verifica che è invertibile per ogni $k \in \mathbf{R}$. Determina per quale valore di k il grafico della funzione inversa di f interseca l'asse y nel punto di coordinate $(0, 4)$. [$k = -2$]

345 Dopo aver determinato il dominio della funzione definita da $f(x) = \sqrt{x} + 1$, giustifica perché è invertibile e determina l'espressione analitica della funzione inversa. Traccia, per punti, il grafico della funzione f e quello della sua inversa. [$f^{-1}(x) = (x-1)^2$, con $x \ge 1$]

346 Date le funzioni $f(x) = x - 1$, $g(x) = x^3$:

a. determina $f \circ g$ e $g \circ f$;
b. giustifica perché sono invertibili e determina l'espressione analitica di f^{-1} e di g^{-1};
c. verifica che risulta $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

347 Considera le funzioni:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x + a}} \quad \text{e} \quad g(x) = x^2 + b$$

a. Determina a e b in modo che $f(-3) = \frac{1}{2}$ e $g(2) = f(-12)$.

Considerate le funzioni f e g corrispondenti ai valori di a e b trovati, rispondi ai seguenti ulteriori quesiti.
b. Determina l'espressione analitica di $f \circ g$ e di $g \circ f$.
c. Determina il dominio di $g \circ f$ e di $f \circ g$.
d. Individua quale delle due funzioni f e g è invertibile (giustificando la risposta) e scrivi l'espressione analitica dell'inversa.

$\left[\textbf{a. } a = 11, b = -5; \textbf{ b. } f(g(x)) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+6}}, g(f(x)) = \frac{1}{\sqrt[3]{(x+11)^2}} - 5; \textbf{ c. } \mathbf{R}, \mathbf{R} - \{-11\};\right.$
$\left.\textbf{d. } \text{è invertibile la funzione } f \text{ e l'inversa è } f^{-1}(x) = \frac{1}{x^3} - 11\right]$

348 Considera la funzione:

$$f(x) = \frac{2x + a}{3x + b}$$

a. Determina a e b in modo che il dominio della funzione sia $\mathbf{R} - \{2\}$ e $f(-4) = 0$.

In corrispondenza dei valori di a e b trovati, rispondi ai seguenti ulteriori quesiti.
b. Studia il segno della funzione.
c. Determina per quali valori di x risulta $f(x-1) \ge f(x) + 1$.
d. Verifica che la funzione f è invertibile e determina l'espressione analitica dell'inversa.

$\left[\textbf{a. } a = 8, b = -6; \textbf{ b. } f(x) > 0 \text{ per } x < -4 \vee x > 2, f(x) = 0 \text{ per } x = -4, f(x) < 0 \text{ per } -4 < x < 2;\right.$
$\left.\textbf{c. } \frac{5-\sqrt{17}}{2} \le x < 2 \vee 3 < x \le \frac{5+\sqrt{17}}{2}; \textbf{ d. } y = \frac{2(3x+4)}{3x-2}\right]$

349 Considera la funzione:

$$f(x) = \frac{kx^2 - 4}{3x^2 + 2x - 5}$$

a. Determina k in modo che uno dei suoi punti di intersezione con l'asse x abbia ascissa $\frac{1}{2}$.

In corrispondenza del valore di k trovato, rispondi ai seguenti ulteriori quesiti.
b. Determina il dominio della funzione f.
c. Determina per quali valori di x la funzione è positiva e per quali si annulla.
d. Stabilisci se la funzione f è invertibile.
e. Considerata la funzione $g(x) = \sqrt{x}$, determina il dominio delle due funzioni $f \circ g$ e $g \circ f$.

$\left[\textbf{a. } k = 16; \textbf{ b. } \mathbf{R} - \left\{-\frac{5}{3}, 1\right\}; \textbf{ c. } f(x) > 0 \text{ per } x < -\frac{5}{3} \vee -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \vee x > 1, f(x) = 0 \text{ per } x = \pm\frac{1}{2};\right.$
$\left.\textbf{d. } \text{non è invertibile; } \textbf{e. } f \circ g \text{ è definita per } x \ge 0 \wedge x \ne 1, g \circ f \text{ è definita per } x < -\frac{5}{3} \vee -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2} \vee x > 1\right]$