Matematica elementare art.4
di Raimondo Valeri

In questo articolo vogliamo provare che esiste un ***operatore*** *che applicato ripetutamente su un* ***qualsiasi*** *numero intero maggiore di 1 fornisce, dopo un numero opportuno di operazioni,* ***sempre*** *un numero* ***primo.***

Sia:

1. $D(n)$:numero dei divisori di n, $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$.

Definizione

Sia:

2. $D^{(k+1)}(n) = D\left(D^{(k)}(n)\right);\ D^{(1)}(n) = D(n),\ D^{(0)}(n) = n$

in cui $D^{(k+1)}(n)$ rappresenta il numero dei divisori di $D^{(k)}(n)$ con $k \in \mathbb{N}$

Vogliamo dimostrare che:

- $\forall n \in \mathbb{N} - \{0,1\}\ \exists\ k,\ k+1 \in \mathbb{N} \,\middle|\, D^{(k)}(n),\ D^{(k+1)}(n)$ **sono numeri primi.**

Prima di procedere con la dimostrazione vediamo qualche esempio:

n	$D(n)$	$D^{(2)}(n)$	$D^{(3)}(n)$	$D^{(4)}(n)$	**k**
4	**3**				**1**
5	2				**0**
6	4	**3**			**2**
8	4	**3**			**2**
12	6	4	**3**		**3**
125	4	**3**			**2**
1128	16	**5**			**2**
$\mathbf{5 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 19}$	$2^4 \cdot 3$	10	4	**3**	**4**
$\mathbf{2^{2^6-1}}$	2^6	**7**			**2**

Per completezza osserviamo che se $D^{(k)}(n)$ è un numero primo anche $D^{(k+1)}(n)$, essendo uguale a 2, è un numero primo.

Dimostrazione 1

Dimostriamo, ora, che:

3. $\forall n \in \mathbb{N} - \{0,1,2\}$ si ha $D(n) < n$

4. $D(n) = n$ se e solo se $n = 2$*

La 3. si prova osservando che, essendo $n > 2$ si ha, $\forall n \in \mathbb{N} - \{0,1,2\}$,

5. $1 < \dfrac{n}{n-1} < 2$

osservando, inoltre, che *(vedere art.1):*

6. $D(n) = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \left[\frac{n}{i} \right] - \left[\frac{n-1}{i} \right] \right\}$, in cui $\left[\frac{n}{i} \right]$ e $\left[\frac{n-1}{i} \right]$ indicano, rispettivamente, la parte intera di $\frac{n}{i}$ e di $\frac{n-1}{i}$ e ricordando infine che

7. $\left[\dfrac{n}{i} \right] - \left[\dfrac{n-1}{i} \right] = \begin{cases} 0 \text{ se i non è un divisore di n} \\ 1 \text{ se i è un divisore di n} \end{cases}$ *(vedere art.1)*

La 7. infatti, implica che la 6. non può in nessun caso essere maggiore di n, mentre la 5.prova, nell'ipotesi 3. che $n-1$ non è mai un divisore di n e, pertanto,

8. $\left[\dfrac{n}{n-1} \right] - \left[\dfrac{n-1}{n-1} \right] = 0$

La 4. si prova osservando che $D(2) = 2$.

Vediamo, ora, cosa implicano le 3. e 4:

Dimostrazione2

Se risulta

* ***l'ipotesi n>1 consente di escludere il caso banale D(1)=1***

9. $D^{(2)}(n) < D(n)$ si applica ancora l'operatore D su $D^{(2)}(n)$

In caso contrario dovrà risultare $D(n) = 2$ e quindi **k=0**

Se è soddisfatta la 9. si hanno ancora due possibilità.:

10. $D^{(3)}(n) < D^{(2)}(n)$ e allora si applica di nuovo l'operatore D su $D^{(3)}(n)$

oppure

11. $DD^{(2)}(n) = D^{(2)}(n)$

che implica , per effetto della 4.

12. $D^{(2)}(n) = 2$

E quindi $D\ (n)$ è un numero primo e **k=1**

Se vale la 10. si avrà, quindi o **k=2** oppure

13. $D^{(4)}(n) < D^{(3)}(n)$

Osserviamo che in questo ultimo caso si ha:

14. $D^{(4)}(n) < D^{(3)}(n) < D^{(2)}(n) < D\ (n) < n$

In generale, quindi, se dopo aver applicato l'operatore D s volte non si riesce a determinare un **k** si avranno le seguenti disuguaglianze:

15. $D^{(s)}(n) < D^{(s-1)}(n) < D^{(s-2)}(n) < ....D\ (n) < n$

Osservando, inoltre, che

16. $D(n) \geq 2$

Deve necessariamente esistere un k tale che

17. $D^{(k+1)}(n) = 2$

Esiste, pertanto, un $k \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, $D^{(k)}(n)$ **è un numero primo. c.v.d.**