Matematica elementare art.3
di Raimondo Valeri

In questo articolo si vuole provare che esiste una funzione $P:\mathbb{N}-\{0,1\}\to\mathbb{R}$ *tale per* ***cui l'intersezione del suo codominio,*** $\left\{P(n)\middle|\, n\in\mathbb{N}-\{0,1\}\right\}$, ***con l'insieme dei naturali fornisce tutti e soli numeri primi.***

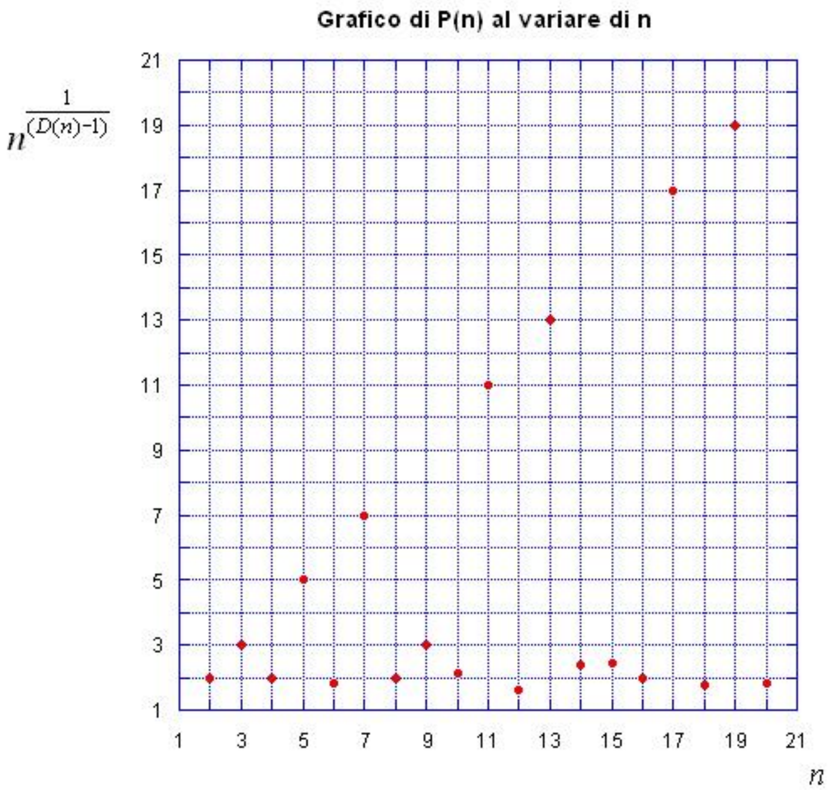
Siano $n\in\mathbb{N}-\{0,1\}$, $D(n)$: numero dei divisori di n.

- ***L'intersezione del codominio della funzione***

  1. $P:\mathbb{N}-\{0,1\}\to\mathbb{R}, P(n)=n^{\frac{1}{D(n)-1}}$

  con l'insieme $\mathbb{N}$ ***è costituita da tutti e soli numeri primi.***

Prima di dimostrare questo risultato riportiamo un grafico di $P(n)$ al variare di n, per $2\le n\le 20$



Dal grafico si osserva che i valori di $P(n)$ sono o numeri primi o numeri non interi.

- ***Dimostrazione***

Sia $D(n) = 2$

In questo caso l'intero n è primo e risulta:

2. $P(n) = n$

Il codominio della funzione, quindi, contiene tutti i numeri primi.

Studiamo, ora le immagini di n secondo P nell'ipotesi $D(n) > 2$.

Richiediamo che questi $P(n)$ siano **interi** la cui scomposizione in fattori risulti:

3. $P(n) = P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} P_3^{\alpha_3} ... P_s^{\alpha_s}, \ \alpha_i \geq 1, \ \alpha_i \in \mathrm{N} - \{0\}$.

In questo caso si ha, evidentemente:

4. $n = P_1^{\alpha_1 (D-1)} P_2^{\alpha_2 (D-1)} P_3^{\alpha_3 (D-1)} ... P_s^{\alpha_s (D-1)}$

Se poi

5. $n = n_1^{\beta_1} n_2^{\beta_2} n_3^{\beta_3} ... n_s^{\beta_s}, \beta_i \geq 1, \ \beta_i \in \mathrm{N} - \{0\}$

è la scomposizione in fattori primi di n, dall'unicità di tale scomposizione seguono:

6. $n_i = P_{i,}$ i=1,2,3...s

7. $\alpha_i (D-1) = \beta_i, \ i = 1, 2, 3 ... s$

Mentre dalla 7. si ha:

8. $\alpha_i D = \alpha_i + \beta_i, \ i = 1, 2, 3 ... s$

Ricordando che:

9. $D(n) = (1+\beta_1)(1+\beta_2)....(1+\beta_s)$.

si ha:

10. $\alpha_i(1+\beta_1)(1+\beta_2)....(1+\beta_s)=\alpha_i+\beta_i,\ i=1,2,3...s$

11. $\alpha_i\beta_1\beta_2....\beta_s<\alpha_i+\beta_i,\ i=1,2,3...s$

Essendo

12. $D(n)>2$,

dalla 8. seguono:

13. $\alpha_i+\beta_i>2\alpha_i,\ i=1,2,3...s$

14. $\alpha_i\beta_1\beta_2....\beta_s<2\beta_i,\ i=1,2,3...s$

Se fosse $s\geq 2$ la 14. implicherebbe, in particolare

15. $\begin{cases}\alpha_1\beta_1\beta_2....\beta_s<2\beta_1\\ \alpha_2\beta_1\beta_2....\beta_s<2\beta_2\end{cases}$

da cui si otterrebbe:

16. $\begin{cases}\alpha_1\beta_2....\beta_s<2\\ \alpha_2\beta_1....\beta_s<2\end{cases}$

Questo sistema ammette l'unico insieme di soluzioni:

17. $\alpha_1=\alpha_2=1=\beta_1=\beta_2=...\beta_s=1$

Essendo, per ipotesi, $s\geq 2$ e tenendo presente il risultato 17. si ha anche:

18. $\alpha_3=\alpha_4=...\alpha_s=1$

L'unico insieme di soluzioni, per $s\geq 2$, sarebbe, quindi

19. $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=...\alpha_s=\beta_1=\beta_2=\beta_3...\beta_s=1$

Dalla 7. si otterrebbe $D(n)=2$ in ***contraddizione*** con la posizione 12.

Quindi, le immagini di n secondo P, nel caso $D(n) > 2$ e nell'ipotesi che s sia **maggiore di 1,** sono numeri **non interi.**

Sia, ora, $s = 1$. Dalla 14. si ha:

20. $\alpha_i \beta_1 < 2\beta_1$

Soddisfatta per $\alpha_i = 1$e, tenendo presente la relazione 8.

21. $\beta_1 = D(n) - 1$

Dalla relazione 5 si ottiene:

22. $n = n_1^{\beta_1}$

$P(n) = n^{\frac{1}{D(n)-1}}$**,** quindi, **è un numero primo**

Abbiamo, dunque, provato che:

- se $D(n) = 2$ allora $P(n)$ è un numero **primo;**
- se $D(n) > 2$ **e** $s \geq 2$ allora $P(n)$ è un numero **non intero;**
- se $D(n) > 2$ **e** $s = 1$ allora $P(n)$ è un numero **primo.**

In ogni caso, quindi:

Se $P(n) = n^{\frac{1}{D(n)-1}}$ è un numero **intero** può essere solo **un numero primo.**

Avendo già provato che il codominio della funzione P contiene *tutti* i numeri primi, la dimostrazione annunciata nell'articolo risulta completata.

Osserviamo, infine, che essendo (vedi art.1)

23. $$D(n) = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \left[\frac{n}{i} \right] - \left[\frac{n-1}{i} \right] \right\}$$**,** la *"formula"*

24. $$P(n) = n^{\frac{1}{\sum_{i=2}^{n} \left\{ \left[\frac{n}{i} \right] - \left[\frac{n-1}{i} \right] \right\}}}$$

consente, in linea di principio, di ottenere tutti i numeri primi anche se non per ogni possibile valore di n ma solo per quei valori per cui $P(n)$ è un numero intero.