

Per stabilire se un numero n assegnato è primo occorrerebbe, in linea di principio, vedere se l'equazione

$$1. D(n)=2, \text{ ovvero } \sum_{i=1}^n \left\{ \left[\frac{n}{i} \right] - \left[\frac{n-1}{i} \right] \right\} = 2 \text{ (vedi..art.1)}$$

ammetta soluzioni per quel numero naturale n .

E' chiaro che un tale metodo non ci condurrebbe da nessuna parte.

Abbiamo visto nell'art.1 che per grandi n si ha,

$$2. \bar{S}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\frac{n}{i} \right] \approx \bar{S}_n \approx \log n$$

Nemmeno questa relazione ci fa fare dei passi in avanti: essa è solo una *stima* del valore medio del numero dei divisori dei naturali compresi tra 1 e n e non ha nulla a che vedere con la funzione $D(n)$!

Se fosse nota per $\bar{S}_n$ una formula **semplice** ed **esatta** (e non solo una **stima semplice**) il problema sarebbe risolto. Basterebbe notare, infatti, che

$$3. D(n) = S_n - S_{n-1} \text{ con } S_n = n\bar{S}_n$$

e risolvere l'equazione $D(n)=2$.

Non esiste una formula semplice per S_n anche se esistono **sommatorie di funzioni che coinvolgono il numero di opportuni divisori di numeri naturali che forniscono risultati semplici ed esatti.**

La più semplice di tali sommatorie è probabilmente la seguente:

$$4. \sum_{i=1}^{a^2} Div_i(\sqrt{i}, a) = \frac{a(a+1)}{2}$$

In cui $Div_i(\sqrt{i}, a)$ rappresenta **il numero dei divisori di i compresi (estremi inclusi) tra $\sqrt{i}$ ed a**

In base a questa notazione si ha, evidentemente

$$5. D(i) = \text{Div}_i(1, i)$$

Dim1 Dimostrazione della 4: $\sum_{i=1}^{a^2} \text{Div}_i(\sqrt{i}, a) = \frac{a(a+1)}{2}$

Si osservi la figura 1.

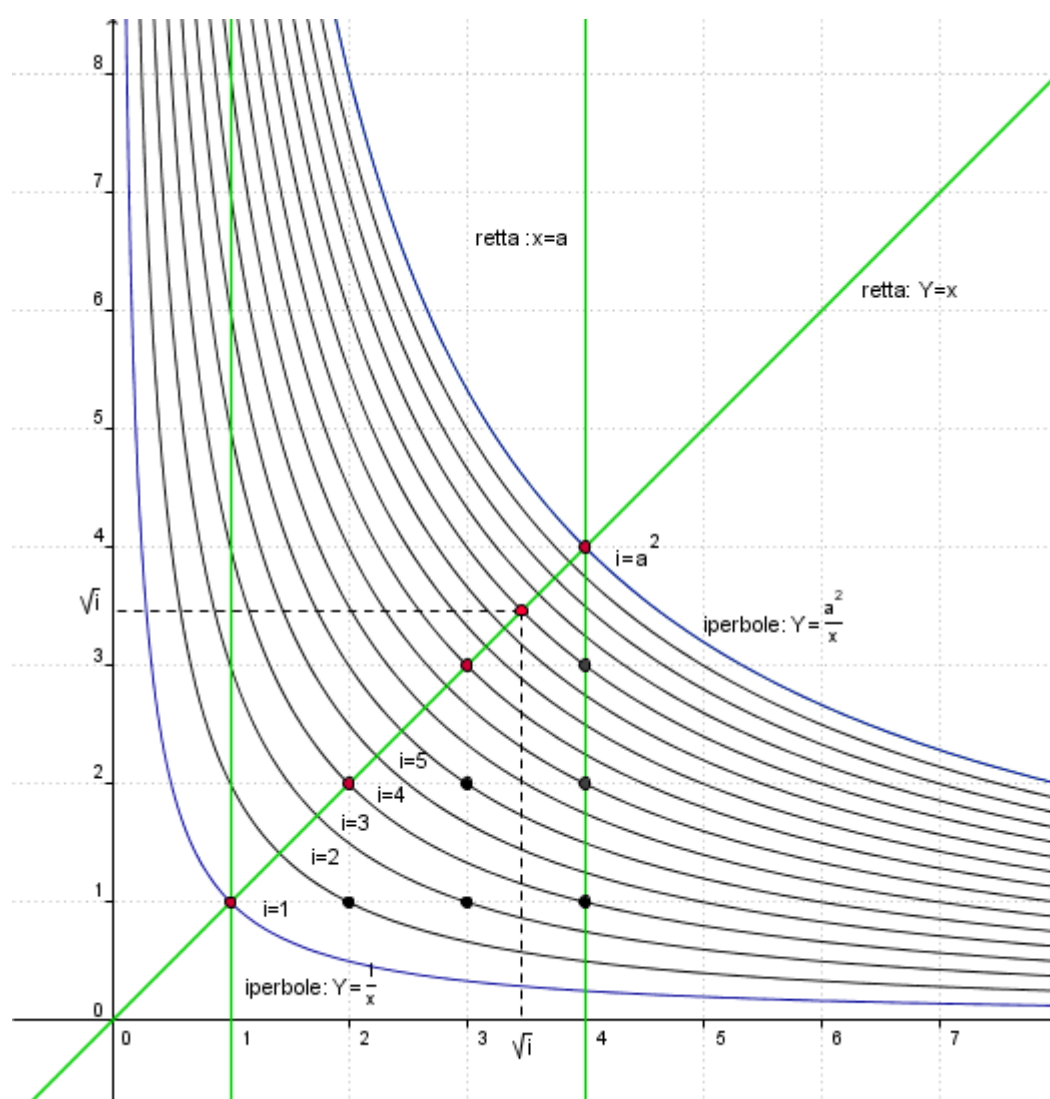


fig. 1: grafici di $y = \frac{1}{x}, \frac{2}{x}, \frac{3}{x}, \frac{4}{x}, \dots, \frac{a^2}{x}$, della retta $y = x$ e della retta $x = a$

Il numero dei punti reticolari dell'insieme

$$6. \quad I = \{(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \mid 1 \leq x \leq a, 0 < y \leq x, a \text{ numero intero}\}$$

è dato, come visto nell'art. 1, dalla sommatoria:

$$7. \quad \tilde{N} = \sum_{j=1}^a [j]$$

Nel nostro caso si ha:

$$8. \quad \tilde{N} = \sum_{j=1}^a j = \frac{a(a+1)}{2}$$

Sia $(\tilde{x}, \tilde{y}) \equiv (\sqrt{i}, \sqrt{i})$ il punto d'intersezione tra la retta $y = x$ e l'iperbole $y = \frac{i}{x}$ con i intero positivo.

Se risulta $1 \leq i \leq a^2$ l'iperbole $y = \frac{i}{x}$ interseca l'insieme I .

I tratti d'iperboli che appartengono all'insieme I sono , inoltre, tali per cui $\sqrt{i} \leq x \leq a$

Il numero dei punti reticolari (vedi art.1) appartenenti al tratto d'iperbole $y = \frac{i}{x}$, $\sqrt{i} \leq x \leq a$, $1 \leq i \leq a^2$ è il numero dei divisori di i compresi tra $\sqrt{i}$ ed a estremi inclusi.

Esempio $a=3$

$$Div_1(\sqrt{1}, 3) = 1; Div_2(\sqrt{2}, 3) = 1; Div_3(\sqrt{3}, 3) = 1;$$

$$Div_4(\sqrt{4}, 3) = 1; Div_5(\sqrt{5}, 3) = 0; Div_6(\sqrt{6}, 3) = 1;$$

$$Div_7(\sqrt{7}, 3) = 0; Div_8(\sqrt{8}, 3) = 0; Div_9(\sqrt{9}, 3) = 1$$

$$\sum_{i=1}^9 Div_i(\sqrt{i}, 3) = \frac{3(3+1)}{2} = 6$$

Formule del tipo 4 possono essere ottenute considerando funzioni del tipo:

$$9. y = x^k, k \in \mathbb{N}, k \geq 1$$

In questi casi si ha:

$$10. \sum_{i=1}^{a^{k+1}} \text{Div}_i \left(\sqrt[k+1]{i}, a \right) = \sum_{j=1}^a j^k$$

In questi casi, infatti, l'ascissa intersezione tra la 9. e l'iperbole $y = \frac{i}{x}$ fornisce:

$$11. \tilde{x} = \sqrt[k+1]{i}$$

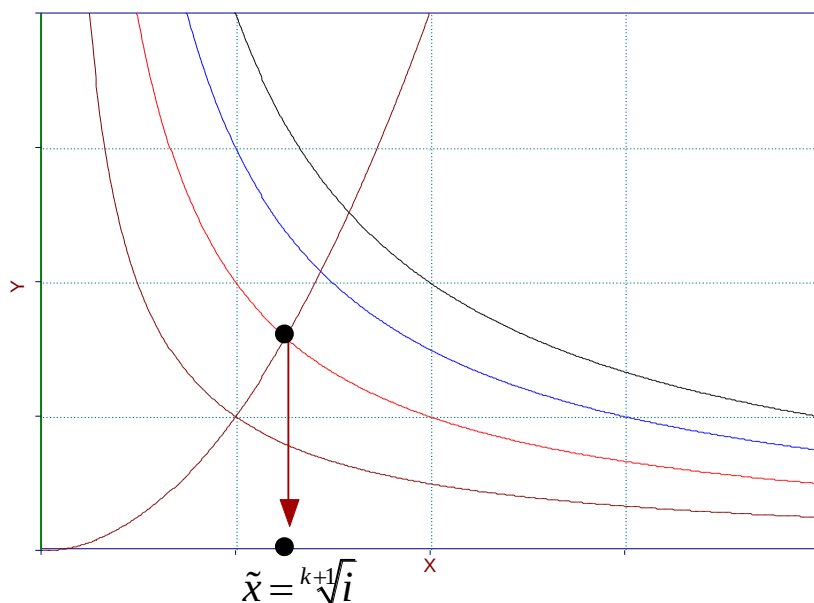


fig. 2: grafici di $y = \frac{1}{x}, \frac{2}{x}, \frac{3}{x}, \frac{4}{x}$
e della parabola $y = x^2$

Il massimo valore per i , nella sommatoria 10.a sinistra dell'uguale, si ottiene notando che l'iperbole $y = \frac{i}{x}$, passante per il punto di coordinate $(a; a^k)$, ha $i = a^{k+1}$

Osserviamo che se $k=1$ la 10. si riduce alla 4.

Se $k=2$ si ottiene:

$$12. \sum_{i=1}^{a^3} \text{Div}_i \left(\sqrt[3]{i}, a \right) = \sum_{i=1}^a i^2 = \frac{1}{6} a(a+1)(2a+1)$$

Esempio $a=2$, $k=2$

$$Div_1(\sqrt[3]{1}, 2) = 1; Div_2(\sqrt[3]{2}, 2) = 1; Div_3(\sqrt[3]{3}, 2) = 0;$$

$$Div_4(\sqrt[3]{4}, 2) = 1; Div_5(\sqrt[3]{5}, 2) = 0; Div_6(\sqrt[3]{6}, 2) = 1;$$

$$Div_7(\sqrt[3]{7}, 2) = 0; Div_8(\sqrt[3]{8}, 2) = 1$$

$$\sum_{i=1}^8 Div_i(\sqrt[3]{i}, 2) = \frac{1}{6} \bullet 2 \bullet (2+1)(2 \bullet 2+1) = 5$$