

In questo articolo vogliamo provare che esiste una **formula** per calcolare il **numero dei divisori** di un dato numero naturale **senza conoscere la scomposizione in fattori primi del numero stesso**.

Seguiremo una strada puramente analitica e una più geometrica. In quest'ultimo caso mostreremo che il problema di individuare i divisori di un dato numero naturale è intimamente connesso con quello della determinazione di opportuni punti reticolari.

Vedremo anche una possibile applicazione della formula, oltre a quella ovvia di determinare il numero dei divisori di n .

● **La formula**
$$D(n) = \sum_{i=1}^n \left\{ \left[\frac{n}{i} \right] - \left[\frac{n-1}{i} \right] \right\}$$

Siano: $n \in \mathbb{N}^+$, $[x]$ = parte intera di x , $D(n)$ = numero dei divisori di n , $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq n$.

Vogliamo dimostrare che la formula:

1. $D(n) = \sum_{i=1}^n \left\{ \left[\frac{n}{i} \right] - \left[\frac{n-1}{i} \right] \right\}$ **rappresenta il numero dei divisori di n .**

Introduciamo alcuni simboli che useremo nel seguito:

2. $\delta_i = \left[\frac{n}{i} \right] - \left[\frac{n-1}{i} \right]$

$q = \left[\frac{n}{i} \right]$, R = resto della divisione di n per i

3. $q^* = \left[\frac{n-1}{i} \right]$, R^* = resto della divisione di $n-1$ per i

Per la dimostrazione, possiamo procedere in due modi:

Primo metodo

Innanzitutto proviamo che:

Dim1 δ_i può assumere solo due valori: 0 oppure 1.

Evidentemente valgono le disuguaglianze:

$$4. \quad \frac{n}{i} - 1 < q \leq \frac{n}{i}$$

$$5. \quad \frac{n-1}{i} - 1 < q^* \leq \frac{n-1}{i}$$

Osserviamo che la 5. implica la

$$6. \quad -\frac{n-1}{i} \leq -q^* < 1 - \frac{n-1}{i}$$

Sommando membro a membro si ottiene:

$$7. \quad \frac{1}{i} - 1 < \delta_i < 1 + \frac{1}{i}$$

Osserviamo che se $i=1$, dalla 2. (o dalla 7.) si deduce che $\delta_i = 1$. Per $i \geq 2$ δ_i può assumere solo i valori 0 e 1: essi sono gli unici numeri interi che soddisfano la disuguaglianza 7.

Dim2 *Dimostrazione della 1:* $D(n) = \sum_{i=1}^n \left\{ \left[\frac{n}{i} \right] - \left[\frac{n-1}{i} \right] \right\}$

Se i è un divisore di n allora $\delta_i = 1$

Infatti, in questo caso:

$$8. \quad n = qi$$

$$9. \quad n-1 = q^*i + R^*$$

Sottraendo membro a membro si ottiene:

$$10. \quad 1 = i\delta_i - R^*$$

Se fosse $\delta_i=0$, R^* sarebbe uguale a -1, che è assurdo.

Ricordando la **Dim1** possiamo concludere che, in questo caso, $\delta_i=1$

Se $\delta_i=1$ allora i è un divisore di n

Infatti, in questo caso:

$$11. n=qi+R$$

$$12. n-1=q^*i+R^*$$

Sottraendo membro a membro si ottiene:

$$13. 1= i+R-R^*$$

ovvero

$$14. R^*=R+i-1$$

Dovendo essere $R^*< i$ si ha che $R <1$. Questa disuguaglianza è soddisfatta solo per $R=0$, ovvero solo se i è un divisore di n .

Secondo metodo

Ricordiamo che un punto (x,y) , nel piano cartesiano, si chiama punto reticolare se entrambe le coordinate sono numeri interi.

Dim3 *Sia f un funzione non negativa il cui dominio è l'intervallo $[a,b]$, con a e b interi e $a < b$. Sia S l'insieme dei punti (x,y) soddisfacenti le disuguaglianze:*

$$15. a \leq x \leq b, 0 < y \leq f(x)$$

Il numero di punti reticolari in S è dato dalla somma:

$$16. \sum_{j=a}^b [f(j)]$$

In figura 1 è rappresentata una generica funzione, alcuni punti reticolari e l'insieme S .

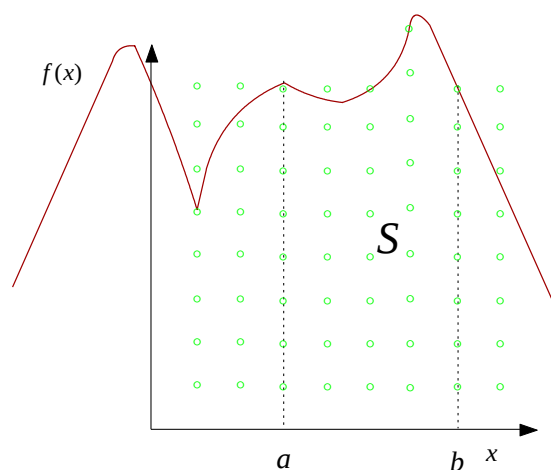


fig.1 funzione generica e punti reticolari

Siano:

$$17. R_i = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x = i, a \leq i \leq b\}$$

$$18. A_i = S \cap R_i, S^* = \text{insieme dei punti reticolari di } S$$

$$19. P_{S^*} = \text{numero elementi di } S^*$$

$$20. P_{A_i} = \text{numero elementi di } A_i$$

A_i è, quindi, l'insieme dei punti reticolari che appartengono a S e alla retta $x=i$

Osserviamo che $f(i) = P_{A_i} + \varepsilon$ in cui $0 \leq \varepsilon < 1$ e quindi che $P_{A_i} = [f(i)]$.

Essendo, inoltre, $S^* = \bigcup_{i=a}^{i=b} A_i$ con $A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$ si ha che

$$P_{S^*} = \sum_{i=a}^b P_{A_i} = \sum_{i=a}^b [f(i)] \text{ che era ciò che volevamo dimostrare.}$$

Dim4..La regione di piano $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \mid 1 \leq x \leq n, \frac{n-1}{x} < y < \frac{n}{x}, n \in \mathbb{N}^+ \right\}$, **non**
contiene punti reticolari.

In figura 2 sono rappresentate le funzioni $f_1(x) = \frac{n}{x}$ e $f_2(x) = \frac{n-1}{x}$ nel caso particolare $n=10$ e $1 \leq x \leq 10$.

Grafico di $y=10/X$

Grafico di $y=9/X$

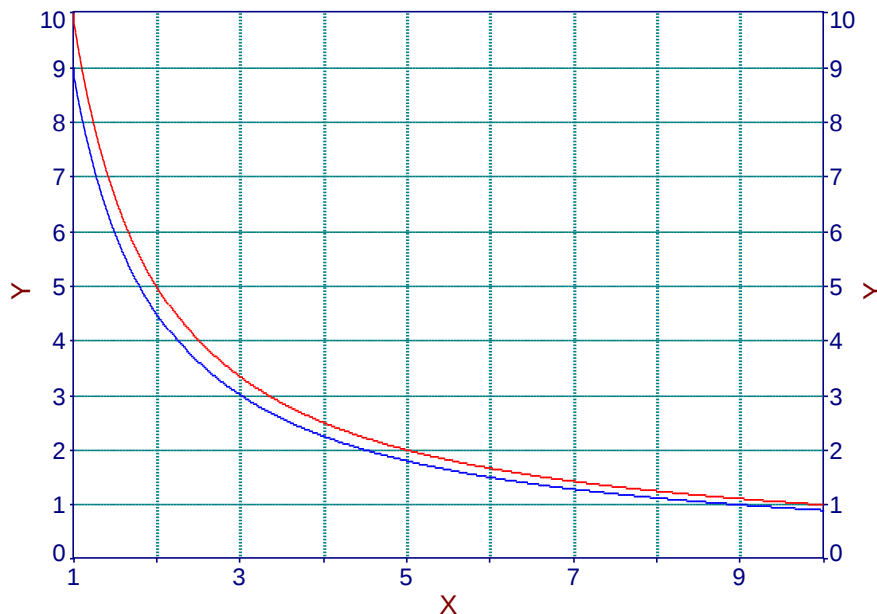


fig. 2: grafici di $f_1(x) = \frac{n}{x}$ e di $f_2(x) = \frac{n-1}{x}$, per $n=10$.

In questo caso $1 \leq x \leq n$, $f_2(x) < y < f_1(x)$
 è la regione tra il grafico blu e quello rosso

Consideriamo le funzioni:

$$21. f_1: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad f_1(x) = \frac{n}{x}, \quad (n \in \mathbb{N}^+)$$

$$22. f_2: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad f_2(x) = \frac{n-1}{x}, \quad (n \in \mathbb{N}^+)$$

Se fosse $(\tilde{x}, \tilde{y})$ un punto reticolare appartenente alla regione di piano $1 \leq x \leq n$, $f_2(x) < y < f_1(x)$, risulterebbe $\frac{n-1}{\tilde{x}} < \tilde{y} < \frac{n}{\tilde{x}}$ ovvero $n-1 < \tilde{x}\tilde{y} < n$ ma ciò sarebbe assurdo perché tra $n-1$ e n **non possono esserci numeri interi**.

$\sum_{i=1}^n \left\{ \left\lceil \frac{n}{i} \right\rceil - \left\lceil \frac{n-1}{i} \right\rceil \right\}$ rappresenta, quindi, il numero dei punti reticoli **appartenenti**
alla curva $f_1(x) = \frac{n}{x}$, con $1 \leq x \leq n$

Dim5 Il numero dei punti reticolari appartenenti alla curva $f_1(x) = \frac{n}{x}$, con $1 \leq x \leq n$, coincide con il numero dei divisori di n . (vi è corrispondenza biunivoca tra punti reticolari appartenenti alla curva $f_1(x) = \frac{n}{x}$ e i divisori di n)

Sia $(\tilde{x}, \tilde{y})$ un punto reticolare appartenente alla curva $f_1(x) = \frac{n}{x}$. ($n = \tilde{x}\tilde{y}$)

Al punto $(\tilde{x}, \tilde{y})$ è associato l'unico punto $(\tilde{x}, 0)$ in cui $\tilde{x}$ è un divisore di n .

Sia $\tilde{x}$ un divisore di n . Allora al punto $(\tilde{x}, 0)$ è associato l'unico punto reticolare $(\tilde{x}, \frac{n}{\tilde{x}})$ appartenente alla curva $f_1(x) = \frac{n}{x}$.

In conclusione, quindi, $D(n) = \sum_{i=1}^n \left\{ \left[\frac{n}{i} \right] - \left[\frac{n-1}{i} \right] \right\}$, $n \geq 1$, è il numero dei divisori di n (c.v.d.)

● **Applicazioni della formula** $D(n) = \sum_{i=1}^n \left\{ \left[\frac{n}{i} \right] - \left[\frac{n-1}{i} \right] \right\}$

La prima possibile applicazione della formula è, ovviamente, quella di determinare il numero dei divisori di n senza conoscere la scomposizione in fattori primi di n stesso.

● Esempio 1

Trovare il numero dei divisori di 12 senza scomporre il numero in fattori primi.

• Soluzione

$$D(12) = 12 - 11 + 6 - 5 + 4 - 3 + 3 - 2 + 2 - 2 + 2 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 = 6$$

In verità esiste una formula più pratica per questo tipo di calcolo per applicare la quale occorre, però, conoscere la scomposizione in fattori primi del numero:

in effetti se

$$23. n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \cdots p_r^{\alpha_r}$$

è la scomposizione in fattori primi di n , allora

$$24. D(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1) \cdots (\alpha_r + 1)$$

Usando le 23. e 24. si ottiene, nel caso $n=12$:

$$12 = 2^2 \cdot 3$$

$$D(12) = 3 \cdot 2 = 6$$

Sebbene interessante, la formula $D(n) = \sum_{i=1}^n \left\{ \left[\frac{n}{i} \right] - \left[\frac{n-1}{i} \right] \right\}$ è di scarsa utilità pratica nel caso appena considerato.

Vediamo ora un caso in cui la formula $D(n) = \sum_{i=1}^n \left\{ \left[\frac{n}{i} \right] - \left[\frac{n-1}{i} \right] \right\}$ ha, invece, a differenza della 24., una grande utilità pratica.

Esempio 2

*Stimare il **valore medio** del numero dei divisori dei naturali compresi tra 1 e n.*

Occorre calcolare, quindi, la **somma di tutti i divisori** dei numeri naturali compresi tra 1 e un dato n e poi dividere tale somma per n..

Dimostriamo, innanzitutto, che la **somma di tutti i divisori** dei numeri naturali compresi tra 1 e un dato numero n, che chiamiamo S_n , è:

$$25. S_n = \sum_{j=1}^n \left[\frac{n}{j} \right]$$

Primo metodo

Per definizione di S_n si ha:

$$26. S_n = \sum_{k=1}^n D(k)$$

ponendo $D(k) = \sum_{j=1}^k \left\{ \left[\frac{k}{j} \right] - \left[\frac{k-1}{j} \right] \right\}$ si ha:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k \left\{ \left[\frac{k}{j} \right] - \left[\frac{k-1}{j} \right] \right\} &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k \left[\frac{k}{j} \right] - \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k \left[\frac{k-1}{j} \right] = \\ \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k \left[\frac{k}{j} \right] - \left\{ \sum_{k'=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{k'+1} \left[\frac{k'}{j} \right] + \sum_{j=1}^1 \left[\frac{0}{j} \right] \right\} &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k \left\lfloor \frac{k}{j} \right\rfloor - \left\{ \sum_{k'=1}^n \sum_{j=1}^{k'+1} \left\lfloor \frac{k'}{j} \right\rfloor - \sum_{j=1}^{n+1} \left\lfloor \frac{n}{j} \right\rfloor \right\} = \\
& \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k \left\lfloor \frac{k}{j} \right\rfloor - \left\{ \sum_{k'=1}^n \sum_{j=1}^{k'} \left\lfloor \frac{k'}{j} \right\rfloor - \sum_{j=1}^{n+1} \left\lfloor \frac{n}{j} \right\rfloor + \sum_{k'=1}^n \left\lfloor \frac{k'}{k'+1} \right\rfloor \right\} = \\
& \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k \left\lfloor \frac{k}{j} \right\rfloor - \sum_{k'=1}^n \sum_{j=1}^{k'} \left\lfloor \frac{k'}{j} \right\rfloor + \sum_{j=1}^{n+1} \left\lfloor \frac{n}{j} \right\rfloor - 0 = \sum_{j=1}^n \left\lfloor \frac{n}{j} \right\rfloor \quad \text{c.v.d.}
\end{aligned}$$

✚ Secondo metodo

In figura 3 sono rappresentate le funzioni:

$$f_1(x) = \frac{1}{x}, f_2(x) = \frac{2}{x}, f_3(x) = \frac{3}{x}, f_4(x) = \frac{4}{x}, f_5(x) = \frac{5}{x}, 1 \leq x \leq 5$$

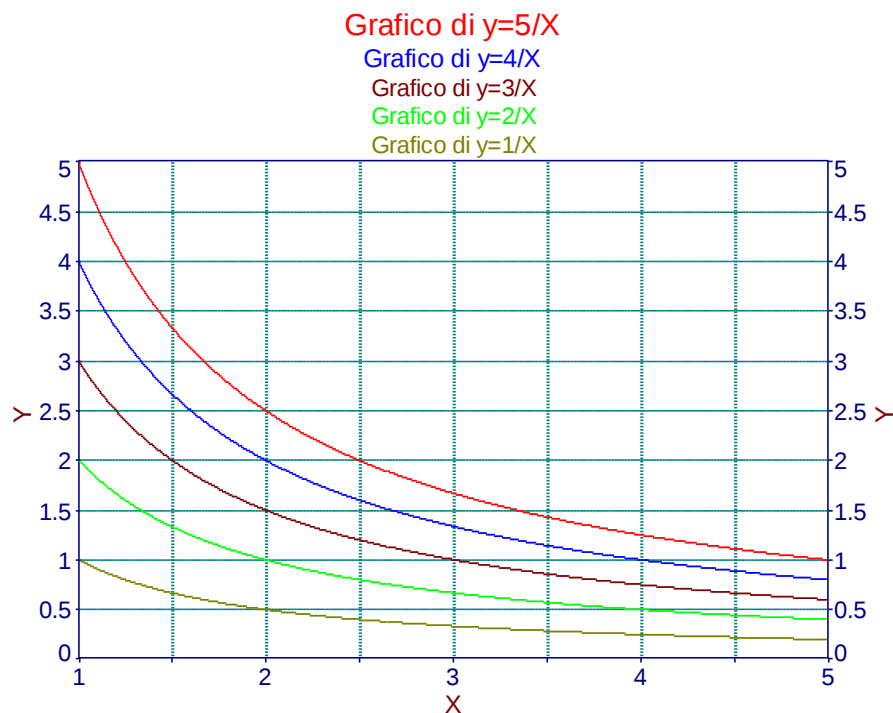


fig. 3: l'insieme S^* , relativo alla funzione $f(x) = \frac{5}{x}$, contiene, in questo caso, tanti elementi quanti sono i divisori di 1,2,3,4,5

Sfruttando la dimostrazione 3 possiamo interpretare geometricamente la 25. come il numero dei punti reticolari dell'insieme $S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \mid 1 \leq x \leq n, 0 < y \leq \frac{n}{x} \right\}$

Abbiamo dimostrato che *la regione* $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \mid 1 \leq x \leq n, \frac{n-1}{x} < y < \frac{n}{x}, n \in \mathbb{N}^+ \right\}$ non contiene punti reticolari: i punti reticolari dell'insieme S possono trovarsi, quindi, solo sulle curve $f_1(x) = \frac{1}{x}, f_2(x) = \frac{2}{x}, f_3(x) = \frac{3}{x} \cdots f_n(x) = \frac{n}{x}$.

Usando la dimostrazione 5 possiamo concludere che $S_n = \sum_{j=1}^n \left[\frac{n}{j} \right]$ c.v.d.

🔴 **Verifica della 25. nel caso particolare di $n=6$**

$$S_6 = \sum_{j=1}^6 \left[\frac{6}{j} \right] = 6+3+2+1+1+1=14$$

$$D(1)+D(2)+D(3)+D(4)+D(5)+D(6)=1+2+2+3+2+4=14$$

Per definizione il **numero medio** dei divisori dei naturali compresi tra 1 e n è dato

$$\text{da: } \bar{S}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\frac{n}{i} \right]$$

Si può dimostrare che (*)

$$27. \sum_{i=2}^n \frac{1}{i} < \log n < \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i}, \forall n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$$

in cui $\log n$ è il logaritmo naturale di n.

Osserviamo che: $\frac{n}{i} - 1 < \left[\frac{n}{i} \right] \leq \frac{n}{i}$ e quindi: $\frac{1}{i} - \frac{1}{n} < \frac{1}{n} \left[\frac{n}{i} \right] \leq \frac{1}{i}$

Sfruttando la 27. possiamo scrivere:

$$28. -1 + \frac{1}{n} + \log n < -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} + \frac{1}{n} < \bar{S}_n \leq 1 + \sum_{i=2}^n \frac{1}{i} < 1 + \log n \text{ ovvero}$$

$$29. -1 + \frac{1}{n} + \log n < \bar{S}_n < 1 + \log n \text{ da cui, essendo } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{S}_n}{\log n} = 1 \text{ vale, per}$$

“grandi” n la stima:

$$30. \bar{S}_n \approx \log n.$$

(*) Tom Apostol: Calcolo, vol. primo, analisi 1, Boringhieri 1985

La funzione logaritmo è, come si vede, un'eccellente stima di $\bar{S}_n$.

Vedremo, in un articolo successivo, come l'impossibilità di stimare con una funzione elementare $D(n)$, sia un problema connesso intimamente con la difficoltà di trovare una funzione *semplice* che stabilisca se un numero è primo.