Matematica elementare art.7
di Raimondo Valeri

Sommatorie elementari risolvibili con un unico metodo

di Raimondo Valeri

visita il sito: www.raimondovaleri.it

Sunto

In questo articolo si dimostra che alcune sommatorie elementari possono essere calcolate sfruttando un unico metodo. **In particolare** il metodo proposto permette di calcolare, in linea di principio, le sommatorie del tipo $\sum_{i=1}^{n} i^k \quad \forall\, k\, intero \geqslant 0$ e la sommatoria $\sum_{i=1}^{n} q^i$

Parole chiave

Sommatorie elementari

Dimostriamo subito che per qualsiasi funzione f vale la relazione seguente:

$\sum_{i=a}^{b} f(i)-f(i-1)=f(b)-f(a-1)$ in cui a e b sono numeri naturali

Dimostrazione

Ponendo $t=i-1$ si ha $\sum_{i=a}^{b} f(i)-\sum_{i=a}^{b} f(i-1)=\sum_{i=a}^{b} f(i)-\sum_{t=a-1}^{b-1} f(t),$ ovvero

$$\sum_{i=a}^{b} f(i)-\sum_{i=a}^{b} f(i-1)=\sum_{i=a}^{b} f(i)-f(a-1)-\sum_{t=a}^{b-1} f(t)=f(b)+\sum_{i=a}^{b-1} f(i)-f(a-1)-\sum_{t=a}^{b-1} f(t)$$

ovvero $\sum_{i=a}^{b} f(i)-f(i-1)=f(b)-f(a-1)$ c.v.d.

Sommatoria 1

Come primo esempio calcoliamo la somma $\boxed{\sum_{i=1}^{n} i}$

Siano $f(i)=i^2, a=1, b=n.$ Allora si ha $\sum_{i=1}^{n} i^2-(i-1)^2=n^2$

da cui $\sum_{i=1}^{n} i^2-(i^2+1-2i)=\sum_{i=1}^{n} -1+2i=-n+2\sum_{i=1}^{n} i=n^2.$

Si può pertanto concludere che $-n+2\sum_{i=1}^{n} i=n^2,$ ovvero $\boxed{\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n^2+n}{2}}$

Sommatoria 2

Come secondo esempio calcoliamo la somma $\boxed{\sum_{i=1}^{n} i^2}$

Siano $f(i)=i^3, a=1, b=n.$ Allora si ha $\sum_{i=1}^{n} i^3-(i-1)^3=n^3$

da cui $\sum_{i=1}^{n} i^3-(i^3-1-3i^2+3i)=\sum_{i=1}^{n} 1+3i^2-3i=n+3\sum_{i=1}^{n} i^2-3\sum_{i=1}^{n} i=n+3\sum_{i=1}^{n} i^2-3\frac{(n^2+n)}{2}=n^3$

Si può pertanto concludere che $n+3\sum_{i=1}^{n} i^2-3\frac{(n^2+n)}{2}=n^3$ ovvero $3\sum_{i=1}^{n} i^2=n^3-n+3\frac{(n^2+n)}{2}$

ovvero $\boxed{\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{2n^3+3n^2+n}{6}}$

Sommatoria 3

Come terzo esempio calcoliamo la somma $\boxed{\sum_{i=1}^{n} i^3}$

Siano $f(i)=i^4, a=1, b=n.$ Allora $\sum_{i=1}^{n} i^4-(i-1)^4=n^4$ e, dopo qualche passaggio, si ha $4\sum_{i=1}^{n} i^3=n^4+n-4\sum_{i=1}^{n} i+6\sum_{i=1}^{n} i^2.$ Le sommatorie al secondo membro sono note, essendo state calcolate in precedenza. Sostituendo si ha $4\sum_{i=1}^{n} i^3=n^4+n-4\frac{n(n+1)}{2}+6\frac{2n^3+3n^2+n}{6}$ da cui

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} i^3=\frac{n^4+2n^3+n^2}{4}}$$

In linea di principio si possono, quindi, calcolare tutte le sommatorie del tipo $\sum_{i=1}^{n} i^k$ $\forall\, k\, intero \geqslant 0.$ *

Sommatoria 4

Come quarto esempio calcoliamo la somma $\boxed{\sum_{i=1}^{n} q^i,\ q\neq 1}$

Siano $f(i)=q^i, a=1, b=n.$ Allora si ha $\sum_{i=1}^{n} q^i-q^{i-1}=q^n-q^0$ ovvero $\sum_{i=1}^{n} q^i-\frac{q^i}{q}=q^n-1$ ovvero $\sum_{i=1}^{n} q^i\left(1-\frac{1}{q}\right)=q^n-1$ ovvero $\sum_{i=1}^{n} q^i\left(\frac{q-1}{q}\right)=q^n-1$ ovvero $\boxed{\sum_{i=1}^{n} q^i=\frac{q^{n+1}-q}{q-1}}$

* Il caso $k=0$ fornisce $\sum_{i=1}^{n} i^0=\sum_{i=1}^{n} 1=n$