Determinazione dei divisori di un insieme di numeri senza eseguire calcoli

di Raimondo Valeri
visita il sito: www.raimondovaleri.it

Sunto

In questo articolo vogliamo provare che si possono trovare tutti i divisori dei numeri (e quindi, in particolare, stabilire se un numero sia primo o meno) senza eseguire calcoli ma solo costruendo una opportuna matrice costituita dai numeri 0 e 1.

Parole chiave

Divisori, numeri primi

Partiamo subito da un esempio concreto considerando la tabella seguente:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
3	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1
4	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0
6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

La tabella è stata costruita seguendo queste indicazioni:

- la riga blu e la colonna verde contengono la stessa successione di numeri naturali: **1,2,3,4,5.........n**;
- i numeri **non colorati** costituiscono una **matrice** i cui elementi sono determinati nel seguente modo:
  a. la prima riga è costituita da tutti **1**;
  b. la seconda riga è costituita da uno 0 e un 1 che si ripetono: **0 1 0 1 0 1.....**
  c. la terza riga è costituita da due zeri e un uno che si ripetono: **001001001001...**
  d. la quarta riga è costituita da tre zeri e un uno che si ripetono: **000100010001....**
  e. la i esima riga è costituita da i-1 zeri e un uno che si ripetono.

La **matrice** costruita con queste semplicissime regole ci permette di trovare i divisori dei numeri compresi tra 1 e l'ultimo di colore blu (18, nel nostro esempio).
Si vede infatti che i divisori dei numeri colorati in blu sono i numeri colorati in verde che individuano le righe che hanno in comune con la colonna contenente il numero di colore blu di cui si vogliono trovare i divisori, il numero 1.

- **Esempio 1:** individuare i divisori di 12

  Soluzione: notiamo che la dodicesima colonna della **matrice** contiene 6 numeri 1: i primi quattro sono contenuti nelle prime quattro righe (i numeri colorati in verde sono, quindi, 1,2,3,4).
  Il quinto uno è contenuto nella riga 6 e il sesto uno è contenuto nella riga 12.
  I divisori di 12 sono, quindi; **1,2,3,4,6,12.**

- **Esempio 2:** individuare i divisori di 13

  Soluzione: la tredicesima colonna della **matrice** contiene 2 numeri 1 in corrispondenza delle righe individuate dai numeri colorati in verde **1 e 13** che sono, infatti, gli unici divisori del numero primo 13.

Notiamo che non abbiamo eseguito calcoli per trovare le soluzioni degli esempi 1 e 2.

Dimostriamo ora che la matrice NxN , realizzata con le regole indicate sopra, permette, in tutta generalità, di trovare i divisori dei numeri compresi tra 1 e N.

Dimostrazione 1

- La **matrice** NxN , costruita con le regole sopra elencate, gode della seguente proprietà: le righe contengono numeri 1 in corrispondenza dei multipli dei numeri di colore verde i e zeri in corrispondenza dei non multipli di i.

Dimostrazione 2

- Notiamo che gli elementi della **matrice** sono $a_{ij}=\left[\frac{j}{i}\right]-\left[\frac{j-1}{i}\right]$.

  Nell'articolo 1, Numero dei divisori di n, avevamo provato che

  $\left[\frac{j}{i}\right]-\left[\frac{j-1}{i}\right]=1$ se i è un divisore di j e 0 se i non è un divisore di j. La presenza di un

  uno implica, quindi, che il numero di colore verde i è un divisore del numero di colore blu j.

Con qualche calcolo possiamo ottenere i divisori dei numeri compresi tra due estremi.

Consideriamo ad esempio la tabella:

	120	**121**	**122**	**123**	**124**	**125**	**126**	**127**	**128**	**129**	**130**
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
3	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0
4	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
5	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
6	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
8	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
9	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
10	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
11	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

In questo caso ci poniamo il problema di trovare i divisori (e gli eventuali numeri primi) dei numeri compresi tra 120 e 130 con la condizione aggiuntiva, che non è restrittiva, che i $divisori \leqslant \sqrt{130}$. Per stabilire i divisori di un numero n (e anche per capire se un numero sia primo) è sufficiente, infatti, trovare tutti i divisori di quel numero compresi tra 1 e $\sqrt{n}$. Gli altri divisori possono essere ottenuti dividendo n per questi ultimi. Nel nostro caso il vincolo $divisori \leqslant \sqrt{130}$ garantisce la possibilità di ottenere tutti i divisori dell'estremo superiore e a maggior ragione anche di individuare quelli degli altri numeri di colore blu.
La colonna con i numeri scritti in verde della tabella è costituita dai numeri naturali compresi tra 1 e

11 $\left(\sqrt{130} \approx 11.40\right)$

La riga con i numeri di colore blu è costituita dai numeri naturali compresi tra 120 e 130 in quanto in questo esempio siamo interessati ai divisori dei numeri compresi, appunto, tra 120 e 130.

Troviamo con i metodi tradizionali i divisori di 120 e scriviamo 1, nella prima colonna della **matrice**, in corrispondenza della riga il cui numero di colore verde sia un divisore di 120 e 0 se il numero di colore verde non sia un divisore. E' facile completare le righe della **matrice** (costituita dai numeri non colorati) che hanno 1 come primo elemento: la prima riga contiene tutti 1, la seconda 10101..... l'ottava 100000001...........

Per quanto riguarda, invece, le righe 7, 9 11 procediamo come segue:

$$\frac{120}{7} \approx 17.14, 18*7=126, \quad \frac{120}{9} \approx 13.33, 14*9=126 \quad \frac{120}{11} \approx 10.91, 11*11=121$$

Per individuare i numeri 126 e 121 abbiamo moltiplicato i denominatori 7,9 e 11 per i risultati delle divisioni approssimati per eccesso.

Scriviamo 1 nella casella intersezione tra la riga 7 e la colonna 126, nella casella intersezione tra la riga 9 e la colonna 126 e nella casella intersezione tra la riga 11 e la colonna 121. A questo punto è facile completare le righe 7, 9 e 11.

La tabella completa ci permette di individuare i divisori dei numeri compresi tra 120 e 130.

Ad esempio i divisori di 126, che possono essere dedotti dalla tabella, sono: 1,2,3,6, 7, 9.

Gli altri divisori di 126 li troviamo dividendo 126 per i divisori appena individuati:

$$\frac{126}{1}=126, \frac{126}{2}=63, \frac{126}{3}=42, \frac{126}{6}=21, \frac{126}{7}=18, \frac{126}{9}=14 \quad .$$

Osservando i numeri in tabella possiamo anche concludere che 127 è un numero primo.